Compito di Ricerca Operativa — Appello del 14/02/05

Esercizio 1 (4 punti). Sia data la seguente riformulazione di un problema di PL rispetto alla base $B = \{x_1, x_3, x_5\}$:

$$\begin{array}{ll} \max & 15 - x_2 - 2x_4 \\ & x_1 = 5/2 - 2x_2 + x_4 \\ & x_3 = 4 + x_2 - 3x_4 \\ & x_5 = 2 - x_2 - x_4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Solamente analizzando la riformulazione data, dire per ciascuna di queste affermazioni se é vera o falsa:

(1) la base B é ammissibile per il primale ma non per il duale;
(2) la base B é ammissibile sia per il primale che per il duale;
(3) il problema di PL ammette infinite soluzioni ottime;
(4) il duale del problema di PL ha insieme di soluzioni ottime non vuoto.

Esercizio 2 (5 punti). Sia dato il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 1 \\ & 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 12 \\ & x_1 + x_2 - x_4 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ & x_4 \leq 0 \end{array}$$

Lo si trasformi in forma standard e si esegua *una singola iterazione* dell'algoritmo che si ritiene piú opportuno utilizzare per risolverlo.

Esercizio 3 (5 punti). Sia dato il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{ll} \max & 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 4x_4 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

La soluzione ottima di tale problema é: $x_1^* = 0,\ x_2^* = 16/3,\ x_3^* = 4/3,\ x_4^* = 4/3$. Si determini una soluzione ottima per il duale del problema dato.

Esercizio 4 (5 punti). Sia dato il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 3x_2 - 5x_4 \\ & 3x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ & -2x_1 + x_2 + x_4 = 5 \\ & -x_1 + x_2 + x_5 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Risolvendo tale problema si arriva alla seguente riformulazione rispetto alla base ottima $B^* = \{x_3, x_2, x_1\}$:

$$\begin{array}{ll} \max & 22 - x_4 - x_5 \\ & x_3 = 12 - 2x_4 + x_5 \\ & x_2 = 7 + x_4 - 2x_5 \\ & x_1 = 1 + x_4 - x_5 \end{array}$$

mentre la soluzione ottima del duale é $u_1^* = 0,\ u_2^* = -4,\ u_3^* = 7$. In quale intervallo posso far variare la modifica Δb_2 del termine noto del secondo vincolo senza perdere l'ottimalitá della base B^*? E come varia il valore ottimo del problema in tale intervallo?

Esercizio 5 (3 punti). Sia dato il problema di PLI:

$$\begin{aligned} \max \quad & cx \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \quad x \in I^n \end{aligned}$$

É noto che:

- i coefficienti nell'obiettivo delle variabili (ovvero le componenti del vettore c) sono tutti valori interi;
- il rilassamento lineare di tale problema ha valore ottimo u^* non intero.

Ricordando la definizione di taglio valido, sapreste definire un taglio valido per questo problema utilizzando solo le informazioni che avete ricevuto? Motivare la risposta.

Esercizio 6 (5 punti). Sia dato il seguente problema di PLI, indicato con P_0:

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in I \end{aligned}$$

La base ottima per il rilassamento lineare di questo problema é $B^* = \{x_1, x_2\}$ e la riformulazione rispetto a tale base é la seguente:

$$\begin{aligned} \max \quad & 12 - x_3 - 2x_4 \\ & x_1 = \tfrac{4}{3} + x_3 - x_4 \\ & x_2 = \tfrac{4}{3} - x_3 + x_4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Si desidera suddividere, secondo la regola vista a lezione, il problema P_0 in due sottoproblemi P_1 e P_2. Come avviene tale suddivisione? Una volta individuata la suddivisione si individui un upper bound (o limitazione superiore) per uno solo (a scelta) dei due sottoproblemi P_1 e P_2.

Esercizio 7 (3 punti). Siano date le tre variabili binarie y_1, y_2, y_3 associate rispettivamente a tre operazioni C_1, C_2, C_3. Per ogni i, $i = 1, 2, 3$, si hanno i seguenti significati dei valori 0 e 1 della variabile y_i:

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{se decido di non eseguire l'operazione } C_i \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ho il seguente vincolo logico:
se l'operazione C_1 non viene eseguita, allora almeno una delle operazioni C_2 e C_3 non deve essere eseguita.
Come esprimereste tale vincolo con le tre variabili che avete a disposizione? Motivare la risposta.

Esercizio 8 (4 punti). Sia dato un grafo non orientato rappresentato dalle seguenti liste di adiacenza:

$$a : (b, d) \quad b : (a, c) \quad c : (b, d, e) \quad d : (a, c) \quad e : (c, f, g) \quad f : (e, g) \quad g : (e, f)$$

Utilizzando gli algoritmi visti a lezione, stabilire se:

a): il grafo é connesso;
b): il grafo é bipartito.

Soluzioni

1. (1) NO. I costi ridotti delle variabili fuori base sono $\gamma_2, \gamma_4 < 0$, quindi la base B é ammissibile e ottima per il primale e la soluzione duale associata lo é per il duale.
(2) SI, per quanto detto sopra.
(3) NO, perché i costi ridotti delle variabili fuori base sono tutti strettamente negativi.
(4) SI, perché dalla presenza di una soluzione ottima finita per il primale segue la presenza di una soluzione ottima finita duale.

2. Effettuando il cambio di variabile $y_4 = -x_4$ ed introducendo le due variabili di surplus e slack x_5, x_6 si ottiene il programma in forma standard

$$\max\ -x_1 - 4x_2 - 5x_3 - y_4$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_5 = 1 \\ &3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_6 = 12 \\ &x_1 + x_2 + y_4 = 8 \\ &x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, y_4 \geq 0. \end{aligned}$$

SE considero la base $B_0 = \{x_5, x_6, y_4\}$, la riformulazione rispetto ad essa é la seguente:

$$\max\ z = -8 - 3x_2 - 5x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &x_5 = -1 + x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ &x_6 = 12 - 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 \\ &y_4 = 8 - x_1 - x_2 \\ &x_1, \ldots, x_6, y_4 \geq 0. \end{aligned}$$

quindi la base B_0 é non ammissibile per il primale ma lo é per il duale. Posso applicare il simplesso duale. Un'iterazione di tale algoritmo mi porta alla base $B_1 = \{x_1, x_6, y_4\}$ con la relativa riformulazione:

$$\begin{array}{lrrrrr} \max & z = & -8 & & -3x_2 & -5x_3 \\ & x_1 = & 1 & +x_5 & -2x_2 & -3x_3 \\ & x_6 = & 9 & -3x_5 & +x_2 & +3x_3 \\ & y_4 = & 7 & -x_5 & +x_2 & +3x_3 \\ & & \multicolumn{4}{l}{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, y_4 \geq 0,} \end{array}$$

Da cui posso notare che la base B_1 é ottima.

3. Il duale del problema dato é

$$\min\ 8u_1 + 12u_2 + 8u_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &u_1 - u_2 + u_3 \geq 4 \\ &u_1 + 2u_2 + u_3 \geq 3 \\ &2u_1 + u_2 + u_3 \geq 8 \\ &u_3 \geq 4 \end{aligned}$$

Avendo $x_2^*, x_3^*, x_4^* > 0$ le condizioni di complementarietà richiedono

$$\begin{aligned} u_1 + 2u_2 + u_3 &= 3 & & u_1 = 3 \\ 2u_1 + u_2 + u_3 &= 8 & \Longrightarrow\ & u_2 = -2 \\ u_3 &= 4 & & u_3 = 4 \end{aligned}$$

4. Per il problema dato, analizzando la riformulazione finale risulta

$$A_{B^*}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Impostando le condizioni di ammissibilità $A_B^{-1}(b + \Delta b) \geq 0$ si ottiene il sistema

$$\begin{array}{l} 2\Delta b_2 \geq -12 \\ -\Delta b_2 \geq -7 \\ -\Delta b_2 \geq -1 \end{array} \implies -6 \leq \Delta b_2 \leq 1.$$

In questo intervallo la base si mantiene ammissibile ed ottima, e la funzione obiettivo ha una variazione

$$\Delta z^* = u_2^* \Delta b_2 = -4\Delta b_2.$$

5. La disuguaglianza $cx \leq \lfloor u^* \rfloor$ è un taglio valido, in quanto essa vale per ogni soluzione intera (conseguenza dell'interezza dei coefficienti in funzione obiettivo) ed esclude la soluzione del rilassamento lineare.

6. La suddivisione avviene imponendo ai due nodi figli rispettivamente i vincoli

$$x_1 \leq 1 \implies \frac{4}{3} + x_3 - x_4 \leq 1 \implies x_3 - x_4 + y_1 = -\frac{1}{3},$$
$$x_1 \geq 2 \implies \frac{4}{3} + x_3 - x_4 \geq 2 \implies x_3 - x_4 - y_2 = \frac{2}{3}.$$

Operando ad esempio sul primo figlio si ottiene

$$\begin{array}{rrrrr} \max & z = & 12 & -x_3 & -2x_4 \\ & x_1 = & \frac{4}{3} & +x_3 & -x_4 \\ & x_2 = & \frac{4}{3} & -x_3 & +x_4 \\ & y_1 = & -\frac{1}{3} & -x_3 & +\mathbf{1}x_4 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, \dots, x_4, y_1 \geq 0,} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} \max & z = & \frac{34}{3} & -3x_3 & -2y_1 \\ & x_1 = & 1 & & -y_1 \\ & x_2 = & \frac{5}{3} & & +y_1 \\ & x_4 = & \frac{1}{3} & +x_3 & +y_1 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, \dots, x_4, y_1 \geq 0,} \end{array}$$

7. L'esercizio richiede di modellare un vincolo logico del tipo

$$\neg y_1 \implies \neg y_2 \vee \neg y_3,$$

quindi la seguente espressione è sufficiente

$$y_2 + y_3 \leq 1 + y_1.$$

Si noti che quando $y_1 = 0$ il vincolo richiede $y_2 + y_3 \leq 1$, cioè almeno una tra C_2 e C_3 non verrà eseguita. Se $y_1 = 1$, y_2, y_3 sono "libere".

8. Applicando gli algoritmi noti, il grafo risulta connesso e non bipartito.