COMPITO DI RICERCA OPERATIVA

ESERCIZIO 1. (5 punti) La riformulazione di un problema di PL rispetto alla base $B = \{x_3, x_4, x_5\}$ è la seguente:

$$\begin{array}{ll} \max & 5 - 2x_1 + 3x_2 \\ & x_3 = 2 + x_1 - 5x_2 \\ & x_4 = 5 + x_2 \\ & x_5 = -2 + x_1 + x_2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Basandosi solo su questa riformulazione, dire per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa (MOTIVARE LA RISPOSTA):

(1) la base B può essere usata come base di partenza per il simplesso primale;
(2) la base B può essere usata come base di partenza per il simplesso duale;
(3) il problema ha regione ammissibile illimitata;
(4) il problema ha obiettivo illimitato;
(5) il valore ottimo di questo problema è 5.

ESERCIZIO 2. (6 punti) Dato il problema di PL con due variabili:

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 \\ & x_2 \leq 1 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

lo si risolva graficamente restituendo soluzione ottima e valore ottimo. Poi:

(1) lo si trasformi in forma standard e si determini la soluzione ottima del problema trasformato in forma standard;
(2) si scriva il duale del problema in forma standard;
(3) si utilizzino le condizioni di complementarità per determinare la soluzione ottima del problema duale.

ESERCIZIO 3. (3 punti) La riformulazione rispetto alla base ottima $B^* = \{x_3, x_4, x_5\}$ di un problema di PL é la seguente:

$$\begin{array}{ll} \max & 5 - 3x_1 - 2x_2 \\ & x_3 = 4 - x_1 + 3x_2 \\ & x_4 = 2 + x_1 - 4x_2 \\ & x_5 = 1 + x_1 - x_2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

In quale intervallo posso far variare la modifica Δc_3 del coefficiente di x_3 nell'obiettivo senza che cambi la base ottima? E in quale intervallo posso far variare la modifica Δc_5 del coefficiente di x_5 nell'obiettivo senza che cambi la base ottima? In entrambi i casi si dica come varia il valore ottimo negli intervalli individuati.

ESERCIZIO 4. (4 punti) Sia dato il seguente problema di PLI:

$$\begin{array}{ll} \max & -2x_1 - x_2 \\ & -\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_3 = \frac{5}{3} \\ & x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \in I \end{array}$$

Lo si risolva usando l'algoritmo di taglio di Gomory.

ESERCIZIO 5. (5 punti) Sia dato il seguente problema di PLI:

$$\begin{array}{ll} \max & -x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq \frac{3}{2} \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \quad x_1, x_2 \in I \end{array}$$

Dopo averlo opportunamente trasformato in forma standard con le dovute cautele (trattandosi di un problema di PLI), lo si risolva usando l'algoritmo Branch-and-Bound.

ESERCIZIO 6. (4 punti) Sia data la rete con i seguenti valori b_i, $i = 1, \ldots, 6$:

$$b_1 = 3 \quad b_2 = 0 \quad b_3 = -1 \quad b_4 = 0 \quad b_5 = 2 \quad b_6 = -4$$

e i seguenti costi unitari di trasporto lungo gli archi:

$$c_{14} = 4 \quad c_{21} = 3 \quad c_{23} = 2 \quad c_{46} = 1 \quad c_{53} = 1 \quad c_{56} = 5 \quad c_{62} = -10.$$

Si dimostri che la base $B = \{x_{14}, x_{23}, x_{46}, x_{53}, x_{56}\}$ è ammissibile e partendo da questa si risolva il problema di flusso a costo minimo usando il metodo del simplesso per tale problema.

ESERCIZIO 7. (4 punti) Avete 5 task con i seguenti profitti:

Task	1	2	3	4	5
Profitto	10	8	7	5	9

Ognuno di questi task consuma quantità diverse di 3 risorse di cui si ha una disponibilità limitata:

Task	1	2	3	4	5	Disponibilità massima
Risorsa 1	2	3	4	7	3	14
Risorsa 2	3	5	6	5	2	12
Risorsa 3	5	4	8	4	8	20

Scrivete il modello opportuno per decidere quali task eseguire e quali non eseguire, tenuto conto che non potete utilizzare di ognuna delle tre risorse una quantità superiore rispetto alla sua disponibilità massima e che volete massimizzare il profitto complessivo dei task che decidete di eseguire.

ESERCIZIO 8. (4 punti) Spiegare quali sono le due proprietà che devono essere soddisfatte da un taglio valido per un problema di PLI e fare un esempio *grafico* di taglio valido per un problema di PLI con due sole variabili.

Soluzioni

1. Dalla riformulazione presentata risulta quanto segue.

(1) Falso, in quanto non si tratta di una base ammissibile ($x_5 < 0$).
(2) Falso, in quanto non è soddisfatta la condizione di ammissibilità duale ($\gamma_2 > 0$).
(3) Vero. La semiretta

$$\begin{aligned} x_3 &= 2 + x_1 \\ x_4 &= 5 \\ x_5 &= -2 + x_1 \qquad t \geq 2. \\ x_1 &= t \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

costituisce un insieme illimitato di soluzioni ammissibili.
(4) Falso, nessuna coppia colonna-costo ridotto soddisfa la condizione di illimitatezza.
(5) Falso, non è possibile affermarlo da questa riformulazione.

2. La Figura 1 raffigura l'insieme S_a nel piano (x_1, x_2). Il vertice $(x_1^* = 1, x_2^* = 1)$ risulta ottimo.

(1) Il problema, posto in forma standard, è il seguente.

$$\begin{array}{llllll} \max & x_1 + 2x_2 & & & & \\ \text{soggetto a} & & & & & \\ & x_2 & +x_3 & & & = 1 \\ x_1 & +x_2 & & +x_4 & & = 2 \\ 2x_1 & -2x_2 & & & x_5 & = 3 \\ & x_1, \ldots, x_5 \geq 0 & & & & \end{array}$$

La riformulazione ottima è

$$\begin{array}{lrrrr} \max & z = & 3 & -x_4 & -x_3 \\ & x_2 = & 1 & & -x_3 \\ & x_1 = & 1 & -x_4 & -x_3 \\ & x_5 = & 3 & +2x_4 & -4x_3 \\ & & x_1, \ldots, x_5 \geq 0 & & \end{array}$$

(2) Il duale rispetto alla forma standard è

$$\begin{array}{lllll} \min & u_1 + u_2 + 3u_3 & & & \\ \text{soggetto a} & & & & \\ & & 2u_2 & +2u_3 & \geq 1 \\ & u_1 & +u_2 & -2u_3 & \geq 2 \\ & u_1 & & & \geq 0 \\ & & u_2 & & \geq 0 \\ & & & u_3 & \geq 0 \end{array}$$

(3) Dall'ottimo (della forma standard) si ottiene

$$\left.\begin{aligned} x_1^* > 0 &\implies u_2^* + 2u_3^* = 1 \\ x_2^* > 0 &\implies u_1^* + u_2^* - 2u_3^* = 2 \\ x_5^* > 0 &\implies u_3 = 0 \end{aligned}\right\} \implies u_1^* = u_2^* = 1, u_3^* = 0.$$

3. La riformulazione dell'ottimo perturbato rispetto a Δc_3 risulta

$$z + \Delta z = (5 + 4\Delta c_3) - (3 + \Delta c_3)x_1 + (3\Delta c_3 - 2)x_2$$

da cui, imponendo le condizioni di ottimalità:

$$\begin{aligned} -3 - \Delta c_3 &\leq 0 \\ -2 + 3\Delta c_3 &\leq 0 \end{aligned} \qquad \implies -3 \leq \Delta c_3 \leq \frac{3}{2}.$$

Per la perturbazione di c_5, in modo analogo si ottiene

$$z + \Delta z = (5 + \Delta c_5) + (\Delta c_5 - 3)x_1 - (2 + \Delta c_5)x_2$$

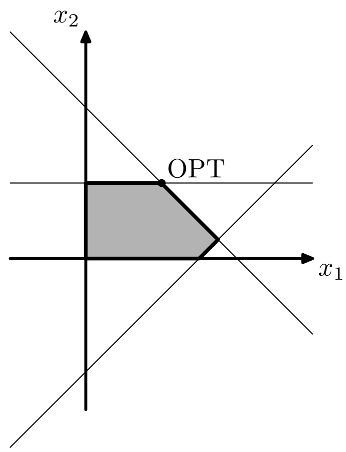


Figura 1. Regione ammissibile per l'esercizio 2.

sulla quale si impongono le condizioni di ottimalità

$$\begin{array}{l} -3 + \Delta c_5 \leq 0 \\ -2 - \Delta c_5 \leq 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \; -2 \leq \Delta c_5 \leq 3.$$

La variazione del valore ottimo nei due casi è data da $4\Delta c_3$ e da Δc_5 rispettivamente.

4. Riformulando rispetto alla base $\{x_3, x_4\}$ si ottiene la soluzione del rilassamento lineare.

$$\begin{array}{lrrrr} \max & z = & 0 & -2x_1 & -x_2 \\ & x_3 = & \frac{5}{3} & +\frac{2}{3}x_1 & -\frac{1}{3}x_2 \\ & x_4 = & 1 & -x_1 & +x_2 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.} \end{array}$$

Il taglio di Gomory associato alla riga di x_3 è

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \geq \frac{2}{3} \implies \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - y \geq \frac{2}{3}, y \geq 0.$$

Si ottiene quindi

$$\begin{array}{lrrrr} \max & z = & 0 & -2x_1 & -x_2 \\ & x_3 = & \frac{5}{3} & +\frac{2}{3}x_1 & -\frac{1}{3}x_2 \\ & x_4 = & 1 & -x_1 & +x_2 \\ & y = & -\frac{2}{3} & +\frac{1}{3}x_1 & +\frac{1}{3}x_2 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.} \end{array} \implies \begin{array}{lrrrr} \max & z = & -2 & -x_1 & -3y \\ & x_3 = & 1 & +x_1 & -y \\ & x_4 = & 3 & -2x_1 & +3y \\ & x_2 = & 2 & -x_1 & +3y \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, y \geq 0.} \end{array}$$

e quindi l'ottimo intero $x_1^* = 0, x_2^* = 2, x_3^* = 1, x_4^* = 3$.

5. Il problema in forma standard per PLI è il seguente.

$$\begin{array}{llllll} \max & -x_1 + x_2 \\ \text{soggetto a} \\ & 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & & = 3 \\ & x_1 & & & +x_4 & = 1 \\ & \multicolumn{4}{l}{x_1, \ldots, x_4 \in I} \end{array}$$

Partendo dalla base ammissibile $\{x_3, x_4\}$ si ottiene la soluzione del rilassamento lineare al nodo radice.

$$\begin{array}{lrrrr} \max & z = & \frac{3}{2} & -2x_1 & -\frac{1}{2}x_3 \\ & x_2 = & \frac{3}{2} & -x_1 & -\frac{1}{2}x_3 \\ & x_4 = & 1 & -x_1 & \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, \ldots, x_4 \geq 0.} \end{array}$$

Si effettua quindi un branch generando due nodi (1 e 2):

$$\textbf{Nodo 1:}\quad x_2 \le 1 \implies -x_1 - \frac{1}{2}x_3 + y = -\frac{1}{2}, y \ge 0$$

$$\begin{array}{rrrr} \max \quad z = & \frac{3}{2} & -2x_1 & -\frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = & \frac{3}{2} & -x_1 & -\frac{1}{2}x_3 \\ x_4 = & 1 & -x_1 & \\ y = & -\frac{1}{2} & +x_1 & +\frac{1}{2}x_3 \\ & & \multicolumn{2}{l}{x_1,\ldots,x_4,y \ge 0.} \end{array} \implies \begin{array}{rrrr} \max \quad z = & 1 & -x_1 & -y \\ x_2 = & 1 & & -y \\ x_4 = & 1 & -x_1 & \\ x_3 = & 1 & -2x_1 & +2y \\ & & \multicolumn{2}{l}{x_1,\ldots,x_4,y \ge 0.} \end{array}$$

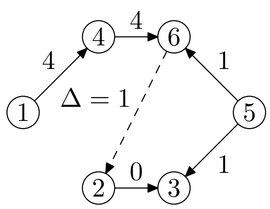
Il nodo 1 viene chiuso per ottimalità, con soluzione intera ($x_1^* = 0, x_2^* = x_3^* = x_4^* = 1$).

$$\textbf{Nodo 2:}\quad x_2 \ge 2 \implies -x_1 - \frac{1}{2}x_3 \ge \frac{1}{2}.$$

Il nodo 2 risulta chiaramente privo di soluzioni ammissibili.

6. La base data è ammissibile. Si ottiene quanto segue.

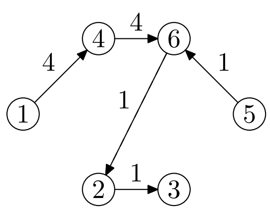
x_{ij}



$\bar{c}_{21} = 2$

$\bar{c}_{62} = -4$

x_{ij}



$\bar{c}_{21} = -2$

$\bar{c}_{35} = 4$

A questo punto l'obiettivo del problema risulta illimitato.

7. Si definiscano le variabili binarie $x_1, \ldots, x_5 \in \{0, 1\}$ con il seguente significato: $x_i = 1$ se e solo se il task i viene eseguito. Il modello risultante è il seguente.

$$\max \quad 10x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 9x_5$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 3x_5 \le 14 \\ &3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 2x_5 \le 12 \\ &5x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 4x_4 + 8x_5 \le 20 \\ &x_1, \ldots, x_5 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

8. Un taglio valido $ax \le b$ deve:

- eliminare l'ottimo x^* del rilassamento lineare: $ax^* > b$;
- non eliminare nessuna soluzione intera: $ax \le b$ per ogni $x \in Z_a$.