COMPITO DI RICERCA OPERATIVA

ESERCIZIO 1. (5 punti) Sia dato il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rl} \max & x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & -x_1 + x_2 \geq -2 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \leq 0 \end{array}$$

Lo si trasformi in forma standard e se ne determini una soluzione ottima.

ESERCIZIO 2. (4 punti) Sia dato la seguente riformulazione rispetto alla base $B = \{x_1, x_2, x_4\}$ di un problema di PL:

$$\begin{array}{rl} \max & 5 + x_3 - x_5 - x_6 \\ & x_1 = 2 - x_3 + x_5 + x_6 \\ & x_2 = 3 - 2x_3 + 2x_5 - x_6 \\ & x_4 = 1 - x_3 + x_6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

Solamente guardando questa riformulazione, per ciascuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa (MOTIVARE LA RISPOSTA):

(1) la regione ammissibile del problema di PL è non vuota;
(2) il valore ottimo del problema di PL è strettamente maggiore di 5;
(3) dalla riformulazione possiamo affermare che il problema ha obiettivo illimitato;
(4) dalla riformulazione posso affermare che la regione ammissibile del problema è illimitata.

ESERCIZIO 3. (5 punti) Sia dato il seguente problema di PL

$$\begin{array}{rl} \max & x_1 - x_2 + x_3 - 2x_6 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ & 2x_2 + x_3 + x_5 = 3 \\ & x_1 - x_3 + x_6 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

La riformulazione di tale problema rispetto alla base ottima $B^* = \{x_3, x_5, x_1\}$ è la seguente:

$$\begin{array}{rl} \max & 3 - 2x_4 - x_6 - 3x_2 \\ & x_3 = 1 - x_4 + x_6 - x_2 \\ & x_5 = 2 + x_4 - x_6 - x_2 \\ & x_1 = 2 - x_4 - x_2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

In quale intervallo posso far variare la modifica Δc_2 del coefficiente di x_2 nell'obiettivo senza che cambi la base ottima? E in quale intervallo posso far variare la modifica Δc_3 del coefficiente di x_3 nell'obiettivo senza che cambi la base ottima? In entrambi i casi si dica come varia il valore ottimo del problema negli intervalli individuati.

ESERCIZIO 4. (5 punti) Sia dato il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + x_2 \\ & -x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ & 2x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Se ne individui il duale, lo si risolva per via grafica e si determini quindi una soluzione ottima del primale utilizzando le condizioni di complementarità.

ESERCIZIO 5. (4 punti) Sia data la seguente riformulazione rispetto alla base ottima $B^* = \{x_1, x_2\}$ del rilassamento lineare di un problema di PLI:

$$\begin{array}{ll} \max & 7 - x_3 - 10x_4 \\ & x_1 = \frac{20}{3} - \frac{7}{6}x_3 - \frac{4}{3}x_4 \\ & x_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_3 - \frac{4}{3}x_4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Si risolva il problema di PLI utilizzando l'algoritmo di Gomory.

ESERCIZIO 6. (3 punti) Sia dato un deposito che può contenere al massimo M unità di merce e siano dati 4 negozi. Dovete decidere:

(1) se utilizzare o non utilizzare il deposito;
(2) nel caso lo utilizziate, dovete decidere per ciascun negozio quale quantità di merce dovrà ricevere dal deposito.

Dopo aver introdotto le opportune variabili, si scriva un vincolo che esprima il fatto che nel caso il deposito non venga utilizzato, i negozi riceveranno una quantità nulla di merce da esso, mentre nel caso venga utilizzato i negozi potranno complessivamente ricevere una quantità di merce non superiore alla capienza M del deposito.

ESERCIZIO 7. (3 punti) Si consideri un generico problema di PLI indicato nel seguito con P:

$$\begin{array}{ll} \max & cx \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \quad x \in I^n \end{array}$$

Si supponga di volerlo risolvere con l'algoritmo branch-and-bound. Per ciascuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa (MOTIVARE LA RISPOSTA):

(1) se la limitazione superiore (upper bound) $U(P)$ del valore ottimo del problema è un valore finito, allora P ha certamente regione ammissibile non vuota;
(2) i due nodi figli di P nell'albero di branch-and-bound hanno upper bound sicuramente strettamente minore rispetto a $U(P)$;
(3) se considero il duale del rilassamento lineare di P, il valore dell'obiettivo duale in qualsiasi soluzione ammissibile del duale stesso può essere utilizzato come upper bound del valore ottimo di P.

ESERCIZIO 8. (4 punti) Sia dato un grafo non orientato definito dalle seguenti liste di adiacenza

$$a:(b,c,g) \quad b:(a,e) \quad c:(a,d) \quad d:(c,f) \quad e:(b,f,h) \quad f:(d,e,h) \quad g:(a)$$

Utilizzando gli algoritmi visti a lezione si stabilisca se il grafo è connesso e se è bipartito.

Soluzioni

1. La forma standard del problema dato corrisponde a

$$\max\ x_1 - x_2'$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &x_1 - x_2' + x_3 = 1\\ &x_1 + x_2' + x_4 = 2\\ &x_1, x_2', x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

La base $B_0 = \{x_3, x_4\}$ risulta quindi ammissibile.

$$\begin{array}{rlll} \max\ z = 0 & +x_1 & -x_2' & \\ x_3 = 1 & -\mathbf{1}x_1 & +x_2' & \Longrightarrow B_1 = B_0 \setminus \{x_3\} \cup \{x_1\}\,; \\ x_4 = 2 & -x_1 & -x_2' & \\ & x_1, \dots, x_4 \geq 0, & & \\ \max\ z = 1 & -x_3 & & \\ x_1 = 1 & -x_3 & +x_2' & \Longrightarrow \text{ottimo} \\ x_4 = 1 & +x_3 & -2x_2' & \\ & x_1, \dots, x_4 \geq 0, & & \end{array}$$

2. (1) Vero. Essendo $x_1, x_2, x_4 \geq 0$, a B corrisponde una soluzione ammissibile.

(2) Vero. Si può osservare facilmente che la successiva base $B' = \{x_1, x_2, x_3\}$ corrisponde a una soluzione con $z = 6$ (non è necessario calcolare tutto il cambio di base) e quindi $z^* \geq 6 > 5$.

(3) Falso. Nella riformulazione non sussiste la condizione di illiminatezza (si noti che $\gamma_5 < 0$).

(4) Vero. Si può osservare che tutte le soluzioni della semiretta

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2 + x_5\\ x_2 &= 3 + 2x_5\\ x_4 &= 1\\ x_5 &= t \end{aligned}\right. \qquad t \geq 0$$

sono soluzioni ammissibili.

3. Per Δc_2 si ottiene immediatamente

$$-\infty \leq \Delta c_2 \leq -\gamma_2 = 3.$$

In questo caso il valore ottimo dl problema non cambia. Per Δc_3, aggiornando la riformulazione si ottiene

$$z = (3 + \Delta c_3) - (2 + \Delta c_3)x_4 + (-1 + \Delta c_3)x_6 - (3 + \Delta c_3)x_2.$$

Imponendo le condizioni di ottimalità si ottiene

$$\begin{array}{lcll} -2 + \Delta c_2 \leq 0 & & \Delta c_3 \geq -2 & \\ -1 + \Delta c_3 \leq 0 & \Longrightarrow & \Delta c_3 \leq 1 & \Longrightarrow -2 \leq \Delta c_3 \leq 1. \\ -3 - \Delta c_3 \leq 0 & & \Delta c_3 \geq -3 & \end{array}$$

La variazione dl valore ottimo di questo problema è Δc_3.

4. Il duale del problema dato è

$$\min\ -u_1$$

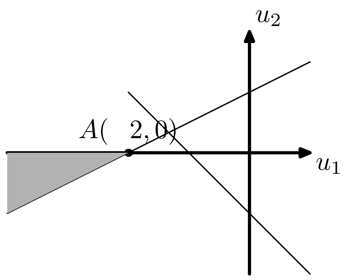

FIGURA 1. Regione di ammissibilità duale per l'esercizio 4.

soggetto a

$$
\begin{aligned}
&-u_1 + 2u_2 \geq 2\\
&-u_1 - u_2 \geq 1\\
&-u_1 \geq 0\\
&-u_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

La regione di ammissibilità del duale è rappresentata in Figura 1. L'ottimo si trova in corrispondenza del vertice $(u_1^* = -2, u_2^* = 0)$. All'ottimo duale si ha

$$
\begin{aligned}
&-u_1^* + 2u_2^* = 2 && \\
&-u_1^* - u_2^* > 1 && \Longrightarrow x_2 = 0\\
&-u_1 > 0 && \Longrightarrow x_3 = 0\\
&-u_2^* = 0 &&
\end{aligned}
$$

e quindi, all'ottimo primale,

$$
\begin{aligned}
-x_1^* &= -1\\
x_4^* &= 0 \qquad \Longrightarrow x_1^* = 1, x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0.\\
x_2 &= x_3 = 0
\end{aligned}
$$

5. Partendo dalla riformulazione data si ricava il taglio

$$\frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \geq \frac{2}{3} \Longrightarrow y_1 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{3}x_4.$$

Si procede quindi come segue.

$$
\begin{array}{rrrrr}
\max\ z = & 7 & -x_3 & -10x_4 & \\
x_1 = & \frac{20}{3} & -\frac{7}{6}x_3 & -\frac{4}{3}x_4 & \\
x_2 = & \frac{2}{3} & +\frac{1}{3}x_3 & -\frac{4}{3}x_4 & \\
y_1 = & -\frac{2}{3} & +\mathbf{\frac{1}{6}}x_3 & +\frac{1}{3}x_4 & \\
 & & & & x_1, \dots, x_4, y_1 \geq 0,
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrr}
\max\ z = & 3 & -6y_1 & -8x_4 & \\
x_1 = & 2 & -7y_1 & +x_4 & \\
x_2 = & 2 & +2y_1 & -2x_4 & \\
x_3 = & 4 & +6y_1 & -2x_4 & \\
 & & & & x_1, \dots, x_4, y_1 \geq 0.
\end{array}
$$

La soluzione ottima del problema di PLI è

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 4 \quad x_4 = 0,$$

con valore ottimo pari a 3.

6. Si può usare una variabile binaria $y \in \{0,1\}$, per la quale si stabilisce che $y = 1$ se e solo se si decide di utilizzare il magazzino. Inoltre occorrono quattro variabili $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$, ognuna delle quali rappresenta il quantitativo di merce che il negozio j ($j = 1,2,3,4$) riceverà dal magazzino. Il vincolo richiesto diventa, con le variabili così definite,

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq My.$$

7. (1) Falso. $U(P)$ limitato *non implica* l'esistenza di soluzioni ammissibili intere. Si consideri

$$\min\ x_1 + x_2$$

soggetto a

$$x_1 + x_2 \leq \frac{1}{2}$$
$$x_1 \geq \frac{1}{4}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

come controesempio.

(2) Falso. La relazione che vale, detti P_1, P_2 i due nodi, è $U(P_1), U(P_2) \leq U(P)$.

(3) Vero. I teoremi sulla dualità assicurano, per ogni $u \in D_a$, $x \in S_a$,

$$z_D(u) \geq z_P(x)$$

e quindi $z(u) \geq U(P)$ per ogni $u \in D_a$.

8. Il grafo risulta connesso e non bipartito — contiene il ciclo (e, f, h, e).