COMPITO DI RICERCA OPERATIVA

ESERCIZIO 1. (5 punti) Sia dato il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & -x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ & x_1 - x_2 + x_5 = -2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Utilizzando il metodo due fasi si stabilisca se il problema ha regione ammissibile vuota oppure no (suggerimento: nel problema di I fase introdurre il minor numero possibile di variabili).

ESERCIZIO 2. (3 punti) Sia dato la seguente riformulazione rispetto alla base $B = \{x_1, x_3, x_5\}$ di un problema di PL:

$$\begin{array}{ll} \max & 7 - x_2 - 2x_4 \\ & x_1 = 1 + x_2 - x_4 \\ & x_3 = -1 + x_2 + 3x_4 \\ & x_5 = 2 + 5x_2 + 3x_4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Solamente guardando questa riformulazione, per ciascuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa (MOTIVARE LA RISPOSTA):

(1) la regione ammissibile del problema di PL è illimitata;
(2) il valore ottimo del problema di PL è strettamente maggiore di 7;
(3) il duale di questo problema ha regione ammissibile non vuota.

ESERCIZIO 3. (5 punti) Sia dato il seguente problema di PL

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + \frac{3}{2}x_2 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 2 \\ & x_1 - 2x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

La riformulazione di tale problema rispetto alla base ottima $B^* = \{x_1, x_2, x_5\}$ è la seguente:

$$\begin{array}{ll} \max & \frac{7}{3} - \frac{5}{6}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \\ & x_1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \\ & x_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 \\ & x_5 = \frac{11}{3} + \frac{4}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

Si individui l'inversa della matrice di base ottima e quindi si individui in quale intervallo posso far variare la modifica Δb_2 del secondo termine noto senza che la base ottima cambi.

ESERCIZIO 4. (5 punti) Sia dato il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{ll} \max & 6x_1 + 2x_2 + x_3 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Se ne individui il duale con le due variabili del duale indicate con u_1, u_2. Si considerino ora i punti

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 6 \quad x_3 = 10$$

e

$$u_1 = 3 \quad u_2 = 4$$

Si verifichi che appartengono alla regione ammissibile rispettivamente del primale e del duale e si stabilisca se le seguenti affermazioni sono vere o false (MOTIVARE LA RISPOSTA):

(1) il primale ha obiettivo illimitato;
(2) il duale ha obiettivo illimitato;
(3) il valore ottimo dei due problemi è 22.

ESERCIZIO 5. (4 punti) Sia data la seguente riformulazione rispetto alla base ottima $B^* = \{x_3, x_4\}$ del rilassamento lineare di un problema di PLI:

$$\begin{array}{ll} \max & \frac{11}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 \\ & x_3 = \frac{5}{3} + \frac{4}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_2 \\ & x_4 = \frac{8}{3} + \frac{7}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Si risolva il problema di PLI utilizzando l'algoritmo di Gomory.

ESERCIZIO 6. (3 punti) Si supponga di poter scegliere se fare o non fare tre investimenti indicati con INV1, INV2 e INV3. Dopo aver introdotto le opportune variabili, si scriva una disequazione corrispondente a ciascuno dei seguenti tre vincoli (MOTIVARE LA RISPOSTA):

(1) l'investimento INV2 si può fare solo se sia l'investimento INV1 che l'investimento INV3 non vengono effettuati;
(2) se non si fa l'investimento INV3, allora si devono fare entrambi gli investimenti INV1 e INV2;
(3) non si possono fare più di 2 investimenti.

ESERCIZIO 7. (5 punti) Dato un problema di PLI si ha che in un nodo dell'albero di branch-and-bound la risoluzione del rilassamento lineare per il calcolo dell'upper bound del nodo porta a questa riformulazione rispetto alla base ottima $B^* = \{x_2, x_3\}$

$$\begin{array}{ll} \max & \frac{25}{3} - x_1 - 2y_1 - 3y_2 \\ & x_2 = \frac{5}{3} - x_1 - y_1 - y_2 \\ & x_3 = \frac{1}{2} + x_1 + y_1 + y_2 \\ & x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

Si effettui il branching di tale nodo e si proceda al calcolo dell'upper bound per i due nodi figli.

ESERCIZIO 8. (4 punti) Sia dato un grafo orientato con i seguenti pesi sugli archi:

	a	b	c	d	e
a	$-$	6	12	1	16
b	5	$-$	9	3	15
c	15	8	$-$	11	10
d	2	4	10	$-$	7
e	18	12	9	8	$-$

Utilizzando il *secondo* algoritmo visto a lezione, si determini un albero di supporto a peso minimo per tale grafo.

Soluzioni

1. Il problema, posto in forma standard, è

$$\max\ 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 = 1\\
&-x_1 - x_2 + x_4 = 1\\
&-x_1 + x_2 - x_5 = 2\\
&x_1, \dots, x_5 \geq 0.
\end{aligned}$$

Aggiungendo una variabile artificiale $s \geq 0$ e passando al problema di prima fase si ottiene

$$\max\ -s$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 = 1\\
&-x_1 - x_2 + x_4 = 1\\
&-x_1 + x_2 - x_5 + s = 2\\
&x_1, \dots, x_5, s \geq 0.
\end{aligned}$$

La base $B_0 = \{x_3, x_4, s\}$ è ammissibile per questo problema.

$$\begin{array}{rrlll}
\max & z = & -2 & -x_1 & +x_2 & -x_5 & \\
 & x_3 = & 1 & -x_1 & -\mathbf{1}x_2 & & \\
 & x_4 = & 1 & +x_1 & +x_2 & & \qquad B_0 = \{x_3, x_4, s\}\\
 & s = & 2 & +x_1 & -x_2 & +x_5 & \\
 & & & \multicolumn{3}{l}{x_1, \dots, x_5, s \geq 0} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrlll}
\max & z = & -1 & -2x_1 & -x_3 & -x_5 & \\
 & x_2 = & 1 & -1x_1 & -x_3 & & \\
 & x_4 = & 2 & & -x_3 & & \qquad B_1 = \{x_2, x_4, s\}\,.\\
 & s = & 1 & +2x_1 & +x_3 & +x_5 & \\
 & & & \multicolumn{3}{l}{x_1, \dots, x_5, s \geq 0} &
\end{array}$$

La base B_1 è ottima per il problema di prima fase, ma il valore dell'obiettivo è strettamente negativo; quindi il problema iniziale non ha soluzioni ammissibili.

2. (1) Vero. La semiretta

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1 + x_2\\
x_3 &= -1 + x_2\\
x_5 &= 2 + 5x_2\\
x_2 &= t
\end{aligned} \qquad \text{per } t \geq 1$$

corrisponde ad un insieme non limitato di soluzioni ammissibili per il problema dato.

(2) Falso. Sia z^* il valore dell'ottimo. Nella riformulazione si riscontrano le condizioni di non ammissibilità ($x_3 < 0$) ma anche di ottimalità ($\gamma_2, \gamma_4 < 0$); quindi si ha ammissibilità duale. Una soluzione ammissibile duale di valore 7 assicura $z^* \leq 7$.

(3) Vero, per la condizione di ammissibilità duale osservata precedentemente.

3. Leggendo le colonne cambiate di segno di $A_{B^*}^{-1}$ sotto le variabili x_3, x_4 nella riformulazione finale, si ha

$$A_{B^*}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0\\ -\frac{4}{5} & \frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

La variazione Δb_2 che non compromette ammissibilità e ottimalità per la base B^* deve soddisfare le disuguaglianze

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}\Delta b_2 &\geq -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3}\Delta b_2 &\geq -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3}\Delta b_2 &\geq -\frac{11}{3} \end{aligned} \implies -1 \leq \Delta b_2 \leq 2.$$

4. Il problema duale è

$$\min\ 2u_1 + 4u_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} u_1 + 2u_2 &\geq 6 \\ 2u_1 - u_2 &\geq 2 \\ -u_1 + u_2 &\geq 1 \end{aligned}$$

con u_1, u_2 variabili libere. Risulta quanto segue. Siano $\bar{x} = (x_1 = 0, x_2 = 6, x_3 = 10)$, $\bar{u} = (u_1 = 3, u_2 = 4)$.
(1) Falso. Si verifica che $\bar{u}$ è una soluzione ammissibile per il duale, quindi il primale non può avere obiettivo illimitato.
(2) Falso. Si verifica che $\bar{x}$ è ammissibile per il primale, quindi il duale non può avere obiettivo illimitato.
(3) Vero. Infatti risulta, per le due soluzioni ammissibili (per primale e duale rispettivamente) date,

$$6\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 + \bar{x}_3 = 22 = 2\bar{u}_1 + 4\bar{u}_2.$$

Questo è sufficiente a stabilire l'ottimalità, per i teoremi sulla dualità.

5. Aggiungendo alla riformulazione il taglio

$$y_1 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \qquad \text{(dalla riga di } x_3\text{)}$$

si ottiene quanto segue.

$$\begin{aligned} \max\ \ z &= \tfrac{11}{3} - \tfrac{2}{3}x_1 - \tfrac{2}{3}x_2 \\ x_3 &= \tfrac{5}{3} + \tfrac{4}{3}x_1 - \tfrac{4}{3}x_2 \\ x_4 &= \tfrac{8}{3} + \tfrac{7}{3}x_1 - \tfrac{1}{3}x_2 \\ y_1 &= -\tfrac{2}{3} + \boldsymbol{\tfrac{2}{3}}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 \\ & x_1, \ldots, x_4, y_1 \geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max\ \ z &= 3 - y_1 - \tfrac{1}{3}x_2 \\ x_3 &= 3 + 2y_1 - 2x_2 \\ x_4 &= 5 + \tfrac{7}{2}y_1 - \tfrac{3}{2}x_2 \qquad \text{(ottimo intero.)} \\ x_1 &= 1 + \tfrac{3}{2}y_1 - \tfrac{1}{2}x_2 \\ & x_1, \ldots, x_4, y_1 \geq 0. \end{aligned}$$

6. Si introducano le variabili binarie $y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}$, assumendo $y_k = 1$ se e solo se l'investimento INVk viene effettuato. I tre vincoli richiesti si possono modellare come segue.

(1) $y_1 + y_3 \leq 2(1 - y_2)$,
(2) $y_1 + y_2 \geq 2(1 - y_3)$,
(3) $y_1 + y_2 + y_3 \leq 2$.

7. Effettuando l'operazione di branch sulla variablile x_2 si ottengono i due nodi

$$\textbf{Nodo 1:} \quad x_2 \le 1 \implies -x_1 - y_1 - y_2 \le -\frac{2}{3}$$

$$\textbf{Nodo 2:} \quad x_2 \ge 2 \implies -x_1 - y_1 - y_2 \ge \frac{1}{3}$$

Il nodo 2 è privo di soluzioni ammissibili. Per il nodo 1 risulta invece quanto segue, introducendo una variabile di slack s nel vincolo di branch.

$$\begin{array}{rrrrrr}
\max \ z = & \frac{25}{3} & -x_1 & -2y_1 & -3y_2 \\
x_2 = & \frac{5}{3} & -x_1 & -y_1 & -y_2 \\
x_3 = & \frac{1}{2} & +x_1 & +y_1 & +y_2 \\
s = & -\frac{2}{3} & +\mathbf{1}x_1 & +y_1 & +y_2 \\
 & \multicolumn{4}{l}{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, s \ge 0}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr}
\max \ z = & \frac{23}{3} & -s & -y_1 & -2y_2 \\
x_2 = & 1 & -s & & \\
x_3 = & \frac{7}{6} & +s & & \\
x_1 = & \frac{2}{3} & +s & -y_1 & -y_2 \\
 & \multicolumn{4}{l}{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, s \ge 0}
\end{array}$$

8. Applicando il secondo algoritmo visto a lezione partendo dal nodo a si aggiungono, nell'ordine, gli archi (a, d), (b, d), (c, b) e (d, e), ottenendo un albero di peso 19.