

COMPITO DI RICERCA OPERATIVA
APPELLO DEL 07/04/04

Esercizio 1

1) Dato il seguente problema di PL:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - x_2 \\ & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

trasformarlo in forma standard (2 punti)

2) Risolverlo con il metodo due fasi (introducendo il minor numero possibile di variabili nel problema di I fase) (9 punti)

3) Stabilire se la soluzione ottima del problema é unica oppure no (1 punto)

4) Scrivere il duale del problema di PL trasformato in forma standard (2 punti)

5) Determinare, *usando le condizioni di complementarità*, una soluzione ottima del duale (4 punti)

6) Si supponga di introdurre il vincolo di interezza sulle variabili del problema di PL. Si risolva il problema di PLI ottenuto in questo modo *con l'algoritmo branch-and-bound* (5 punti)

Esercizio 2

Sia dato il grafo non orientato con i pesi sugli archi riportati nella seguente tabella:

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
<i>a</i>	∞	2	4	9	∞
<i>b</i>	—	∞	3	11	12
<i>c</i>	—	—	∞	6	5
<i>d</i>	—	—	—	∞	7
<i>e</i>	—	—	—	—	∞

Si determini *con il secondo algoritmo visto a lezione e sulle dispense* un albero di supporto a peso minimo (4 punti)

Esercizio 3

- (1) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false motivando le risposte con opportuni riferimenti alla teoria o con opportuni esempi (3 punti)
- a):** Dato un problema di PLI, l'insieme Z_{ott} delle sue soluzioni ottime può contenere tre soli punti.
 - b):** Dato un problema di PL, l'insieme S_{ott} delle sue soluzioni ottime può contenere due soli punti.
 - c):** Dato un problema di PLI, l'insieme Z_{ott} delle sue soluzioni ottime può essere illimitato.
- (2) Sia dato un problema di PLI

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad x_j \in I \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Si supponga che:

- i coefficienti c_j delle variabili nell'obiettivo siano tutti interi;
- sia noto un punto x^0 appartenente alla regione ammissibile del problema di PLI con valore dell'obiettivo pari a α , cioè:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j^0 = \alpha.$$

Si risolva il rilassamento lineare del problema di PLI con l'aggiunta del vincolo

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \geq \alpha + 1,$$

ovvero si risolva il seguente problema di PL:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n c_j x_j \geq \alpha + 1 \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Se tale problema di PL ha regione ammissibile vuota, che cosa possiamo dire per il problema di PLI? (3 punti)

SOLUZIONI

1. (1) Il problema in forma standard risulta

$$\max 2x_1 - x_2$$

soggetto a

$$\begin{array}{rrrrrr} x_1 & +x_2 & -x_3 & & & = 2 \\ 3x_1 & +2x_2 & & +x_4 & & = 7 \\ -x_1 & +x_2 & & & +x_5 & = 1 \\ x_1, \dots, x_5 & \geq 0. \end{array}$$

(2) Poiché $\{x_3, x_4, x_5\}$ non rappresenta una base ammissibile, si può impostare il problema di prima fase con la sola variabile artificiale s_1

$$\max -s_1$$

soggetto a

$$\begin{array}{rrrrrr} x_1 & +x_2 & -x_3 & & +s_1 & = 2 \\ 3x_1 & +2x_2 & & +x_4 & & = 7 \\ -x_1 & +x_2 & & & +x_5 & = 1 \\ x_1, \dots, x_5 & \geq 0. \end{array}$$

Tenendo conto che $s_1 = 2 - x_1 - x_2 + x_3$ si parte dalla seguente riformulazione iniziale, rispetto alla base $B_0 = \{s_1, x_4, x_5\}$

$$\begin{array}{ll} \max & z = -2 \quad +x_1 \quad +x_2 \quad -x_3 \\ & s_1 = 2 \quad -1x_1 \quad -x_2 \quad +x_3 \\ & x_4 = 7 \quad -3x_1 \quad -2x_2 \quad \implies B_1 = B_0 - \{s_1\} \cup \{x_1\}; \\ & x_5 = 1 \quad +x_1 \quad -x_2 \\ & x_1, \dots, x_5, s_1 \geq 0 \\ \max & z = 0 \quad -s_1 \\ & x_1 = 2 \quad -s_1 \quad -x_2 \quad +x_3 \\ & x_4 = 1 \quad +3s_1 \quad +x_2 \quad -3x_3 \\ & x_5 = 3 \quad -s_1 \quad -2x_2 \quad +x_3 \\ & x_1, \dots, x_5, s_1 \geq 0. \end{array}$$

La base B_1 è quindi ottima per la prima fase ed ammissibile per il programma iniziale. Lasciando cadere la variabile s_1 e sostituendo $x_1 = 2 - x_2 + x_3$ nella funzione obiettivo originale, si ottiene la riformulazione

$$\begin{array}{ll} \max & z = 4 \quad -3x_2 \quad +2x_3 \\ & x_1 = 2 \quad -x_2 \quad +x_3 \\ & x_4 = 1 \quad +x_2 \quad -3x_3 \implies B_2 = B_1 - \{x_4\} \cup \{x_3\}, \\ & x_5 = 3 \quad -2x_2 \quad +x_3 \\ & x_1, \dots, x_5 \geq 0 \end{array}$$

ed infine

$$\begin{array}{ll} \max & z = \frac{14}{3} \quad -\frac{7}{3}x_2 \quad -\frac{2}{3}x_4 \\ & x_1 = \frac{7}{3} \quad -\frac{2}{3}x_2 \quad -\frac{1}{3}x_4 \\ & x_3 = \frac{1}{3} \quad +\frac{1}{3}x_2 \quad -\frac{1}{3}x_4 \quad (\text{ottimo}) \\ & x_5 = \frac{10}{3} \quad -\frac{5}{3}x_2 \quad -\frac{1}{3}x_4 \\ & x_1, \dots, x_5 \geq 0. \end{array}$$

- (3) Poiché $\gamma_2, \gamma_4 < 0$, la soluzione ottima trovata è unica.
 (4) Il duale, rispetto alla forma standard ricavata in (1), risulta

$$\min 2u_1 + 7u_2 + u_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} u_1 + 3u_2 - u_3 &\geq 2 \\ u_1 + 2u_2 + u_3 &\geq -1 \\ -u_1 &\geq 0 \\ u_2 &\geq 0 \\ u_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

- (5) Tenuto conto che all'ottimo primale $x_1^*, x_3^*, x_5^* > 0$ si hanno le condizioni

$$\begin{aligned} u_1^* + 3u_2^* - u_3^* &= 2 \\ -u_1^* &= 0 \implies u_1^* = 0, u_2^* = \frac{2}{3}, u_3^* = 0, \\ u_3^* &= 0 \end{aligned}$$

con le quali risulta anche $z^* = 0 + 7 \cdot \frac{2}{3} + 0 = \frac{14}{3}$, come previsto dalla teoria.

- (6) L'ultima riformulazione del punto (2) fornisce la soluzione ottima per il rilassamento lineare del nodo radice 0. La soluzione non è intera per cui si prosegue eseguendo il branch sulla variabile x_1 , ottenendo i vincoli supplementari

$$\begin{aligned} x_1 \leq 2 &\implies y_1 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4 \quad (\text{Nodo 1}), \\ x_1 \geq 3 &\implies y_2 = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 \quad (\text{Nodo 2}). \end{aligned}$$

Si osserva subito che il nodo 2 risulta privo di soluzioni ammissibili. Risolvendo il nodo 1 si ha

$$\begin{aligned} \max \quad z &= \frac{14}{3} - \frac{7}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_4 \\ x_1 &= \frac{7}{3} - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 \\ x_3 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 \\ x_5 &= \frac{10}{3} - \frac{5}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 \\ y_1 &= -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4 \\ x_1, \dots, x_5, y_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 4 - x_2 - 2y_1 \\ x_1 &= 2 - y_1 \\ x_3 &= 0 + x_2 - y_1 \\ x_5 &= 3 - x_2 - y_1 \\ x_4 &= 1 - 2x_2 + 3y_1 \\ x_1, \dots, x_5, y_1 &\geq 0. \end{aligned}$$

L'ultima riformulazione risolve all'ottimo il nodo 1 con soluzione intera, chiudendolo quindi per ottimalità e fornendo $LB = 4$. Poiché non ci sono più nodi aperti, la soluzione $x_1^* = 2, x_3^* = 0, x_4^* = 3, x_4^* = 1, x_2^* = 0$ risulta ottima per il PLI.

- 2.** Applicando il secondo algoritmo visto a lezione si parte dal nodo a e si aggiungono nell'ordine gli archi $(a, b), (b, c), (c, e), (c, d)$ ottenendo un albero di supporto di costo 16.
3. (1) Valgono le seguenti considerazioni

- (1) Vero. Il PLI

$$\max x_1 + x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \in I$$

ha le sole soluzioni ottime $(2, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 2)$.

- (2) Falso. Senza perdita di generalità, si consideri un programma lineare in forma standard

$$\max \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_1, \dots, x_n \geq 0,$$

e siano x^* , $\bar{x}^*$ due soluzioni ottime distinte con valore di funzione obiettivo z^* . Allora per ogni $\alpha \in (0, 1)$ risulta

$$\sum_{j=1}^n c_j [(1 - \alpha)x_j^* + \alpha \bar{x}_j^*] =$$

$$(1 - \alpha) \sum_{j=1}^n c_j x_j^* + \alpha \sum_{j=1}^n c_j \bar{x}_j^* =$$

$$(1 - \alpha)z^* + \alpha z^* = z^*$$

e inoltre, per ogni i

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} [(1 - \alpha)x_j^* + \alpha \bar{x}_j^*] =$$

$$(1 - \alpha) \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* + \alpha \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j^* =$$

$$(1 - \alpha)b_i + \alpha b_i = b_i.$$

Quindi ognuna delle infinite combinazioni lineari convesse di x^* e $\bar{x}^*$ è soluzione ottima ed ammissibile.

- (3) Vero. Si consideri il PLI

$$\max x_2$$

$$x_1 \geq 1$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \in I$$

per il quale le soluzioni $(x_1, 1)$ con $x_1 = 1, 2, 3, \dots$ sono tutte ottime.

- (2) Il risultato citato indica che non esistono soluzioni del PLI con
- $\sum_{j=1}^n c_j x_j \geq \alpha$
- , quindi si può dedurre che l'ottimo
- z^*
- del PLI è limitato da

$$z^* \leq \lfloor \alpha \rfloor;$$

l'uso di $\lfloor \cdot \rfloor$ è giustificato dall'ipotesi di interezza dei c_j . Quindi il punto x^0 è soluzione ottima del problema di PLI.