COMPITO DI RICERCA OPERATIVA
APPELLO DEL 14/04/05

ESERCIZIO 1. (5 punti) Sia data una base $B = \{x_1, x_2, x_4\}$ di un problema di PL con la relativa riformulazione rispetto ad essa:

$$\begin{array}{ll} \max & 5 - 2x_3 + 2x_6 \\ & x_1 = 1 + 2x_3 + x_5 - x_6 \\ & x_2 = 2 + x_3 - x_5 + x_6 \\ & x_4 = -x3 + x_5 + 2x_6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

Per ciascuna delle seguenti affermazioni dire se é vera o falsa (MOTIVANDO LA RISPOSTA):

- la base B é ammissibile per il primale;
- la soluzione di base del primale associata a B é degenere;
- la base B é ammissibile per il duale;
- la base B soddisfa la condizione di ottimalitá per il primale;
- la base B soddisfa la condizione di illimitatezza per il primale.

ESERCIZIO 2. (3 punti) Sia dato un problema di PL in questa forma:

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & i = 1, \ldots, m \\ & x_j \geq 0 & j = 1, \ldots, n \end{array}$$

per il quale si sa inoltre che:

$$\forall j \ : \quad c_j \geq 0$$
$$\forall i \ : \quad b_i < 0$$

Con le informazioni a disposizione decidete quale tra i tre algoritmi Simplesso Primale, Simplesso Duale, Metodo Due Fasi, sia il piú opportuno per risolvere questo problema (MOTIVARE LA RISPOSTA).

ESERCIZIO 3. (5 punti) Sia dato il seguente problema di PL con due sole variabili:

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Dopo aver risolto per via grafica questo problema, si stabilisca in quale intervallo posso far variare il coefficiente di x_1 nell'obiettivo senza che la soluzione ottima del problema cambi.

ESERCIZIO 4. (5 punti) Sia dato il seguente problema di PLI:

$$\begin{array}{lll} \max & 3x_1 - 2x_2 - x_3 & \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 & \\ & 2x_1 - x_2 - x_3 \leq 5 & \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & x_1, x_2, x_3 \in I \end{array}$$

Se ne calcoli un upper bound e lo si suddivida in due sottoproblemi (SENZA calcolare l'upper bound per i sottoproblemi).

ESERCIZIO 5. (4 punti) Sia dato un insieme $N = \{1, \ldots, n\}$ di n compiti e siano date m persone. Ogni persona i é in grado di svolgere un sottinsieme $S_i \subseteq N$ di compiti. In un problema dovete selezionare un sottinsieme di queste m persone e tra i vincoli avete che nessuno degli n compiti puó essere svolto da piú di una delle persone che avete selezionato. Introducete le opportune variabili per questo problema ed esprimete attraverso queste il vincolo dato.

ESERCIZIO 6. (4 punti) La soluzione ottima del seguente problema di PL:

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 - 4x_2 - 3x_3 \\ & x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 5 \\ & -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5 = 7 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

é:

$$x_1* = 5 \quad x_2^* = 0 \quad x_3^* = 0 \quad x_4^* = 0 \quad x_5^* = 12.$$

Si ricavi il duale di questo problema e, utilizzando le condizioni di complementaritá, si determini la soluzione ottima del duale.

ESERCIZIO 7. (4 punti) Il rilassamento lineare di un problema di PLI ha la seguente riformulazione rispetto alla base ottima:

$$\begin{array}{ll} \max & 7 - 3x_1 - 2x_2 \\ & x_3 = \frac{4}{3} + \frac{8}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_2 \\ & x_4 = 1 + 2x_1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Si risolva il problema di PLI con l'algoritmo di taglio di Gomory.

ESERCIZIO 8. (4 punti) Sia dato il grafo non orientato definito dalle seguenti liste di adiacenza:

$$a: \ (c, d) \quad b: \ (h, i) \quad c: \ (a, g) \quad d: \ (a, g) \quad e: \ (g)$$

$$f: \ (h) \quad g: \ (c, d, e) \quad h: \ (b, f) \quad i: \ (b)$$

Si stabilisca, *utilizzando gli algoritmi visti a lezione*, se il grafo é connesso e se é bipartito.

Soluzioni

1. Sulle quattro affermazioni vale quanto segue.

- VERO. $x_1, x_2, x_4 \geq 0$ e i vincoli sono soddisfatti ponendo $x_3 = x_6 = 0$.
- VERO. $x_4 = 0$, e vale la definizione di base degenere.
- FALSO. Questo implicherebbe ottimalità primale, mentre $\gamma_6 > 0$.
- FALSO (vedi sopra).
- FALSO. Si ha $\gamma_6 > 0$, ma esiste $\alpha_{16} < 0$.

2. Simplesso duale. La forma standard del PL considerato sarà

$$\max \sum_{j=1}^{n} -c_j x_j$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} -a_{ij}x_{ij} - y_i = -b_i, \qquad i = 1, \ldots, m, \\ &x_1, \ldots, x_n \geq 0. \end{aligned}$$

La base $\{y_1, \ldots, y_n\}$ non è ammissibile primale, ma sussistono le condizioni di ottimalità primale (e quindi ammissibilità duale) $c_j \leq 0 \ \forall j$ che permettono l'applicazione del simplesso duale.

3. La soluzione ottima si trova, per via grafica, al punto di intersezione delle due rette $r\colon x_1 + 2x_2 = 6$ e $s\colon 5x_1 + 2x_2 = 10$, quindi OPT$(x_1^* = 1, x_2^* = \frac{5}{2})$. La retta isoprofitto passante per OPT è la retta $t\colon 2x_1 + x_2 = \frac{9}{2}$. La r ha coefficiente angolare $-\frac{1}{2}$, la s ha coefficiente angolare $-\frac{5}{2}$ e la t ha coefficiente angolare -2. Perturbando il coefficiente di x_1, la t assume un coefficiente angolare $-(\Delta_1 + 2)$. Graficamente si vede che OPT rimane ottimo fintanto che il coefficiente angolare di t è compreso tra quelli di r ed s, quindi

$$\begin{aligned} -2 - \Delta_1 &\geq -\frac{5}{2} \\ -2 - \Delta_1 &\leq -\frac{1}{2} \end{aligned} \implies -\frac{3}{2} \leq \Delta_1 \leq \frac{1}{2}.$$

4. Con un'iterazione di simplesso si arriva alla base ottima $B = \{x_1, x_5\}$.

$$\begin{array}{rrrrrr} \max & z = & \frac{9}{2} & -\frac{3}{2}x_4 & -\frac{7}{2}x_2 & -\frac{5}{2}x_3 \\ & x_1 = & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}x_4 & -\frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 \\ & x_5 = & 2 & +x_4 & +2x_2 & +2x_3 \\ & & \multicolumn{4}{l}{x_1, \ldots, x_5 \geq 0.} \end{array}$$

Effettuando il branch sulla variabile x_1 si ottengono i due nodi

Nodo 1: $\quad x_1 \leq 1 \implies y_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3, \qquad (y_1 \geq 0);$

Nodo 2: $\quad x_1 \geq 2 \implies y_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3, \qquad (y_2 \geq 0).$

5. Se si introducono le variabili $y_i \in \{0, 1\}$ con il significato $y_i = 1$ se e solo se la persona i è selezionata, il vincolo richiesto dal test è modellato dalle disuguaglianze

$$\sum_{i\colon j \in S_i} y_i \leq 1, \qquad \text{per } j = 1, \ldots, n.$$

6. Il programma duale è

$$\min \ 5u_1 + 7u_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
&u_1 - u_2 \geq 1\\
&-2u_1 + u_2 \geq -4\\
&-2u_1 + 3u_2 \geq -3\\
&u_1 \geq 0\\
&u_2 \geq 0
\end{aligned}$$

La soluzione ottima primale data implica, per le condizioni di complementarietà,

$$\begin{aligned}
x_1^* = 5 &\implies u_1^* - u_2^* = 1\\
x_5^* = 12 &\implies u_2^* = 0
\end{aligned}$$

e quindi $u_1^* = 1, u_2^* = 0$. Risulta inoltre $z^* = 5u_1^* + 7u_2^* = x_1^* - 4x_2^* - 3x_3^* = 5$, come previsto.

7. Effettuando il taglio sulla prima riga si ottiene

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \geq \frac{1}{3},$$

e quindi

$$\begin{array}{rrrrr}
\max & z = & 7 & -3x_1 & -2x_2\\
& x_3 = & \frac{4}{3} & +\frac{8}{3}x_1 & -\frac{4}{3}x_2\\
& x_4 = & 1 & +2x_1 & \\
& y_1 = & -\frac{1}{3} & +\frac{1}{3}x_1 & +\mathbf{\frac{1}{3}}x_2\\
& & \multicolumn{3}{l}{x_1, \ldots, x_4, y_1 \geq 0.}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr}
\max & z = & 5 & -x_1 & -6y_1\\
& x_3 = & 0 & +4x_1 & -4y_1\\
& x_4 = & 1 & +2x_1 & -9y_1\\
& x_2 = & 1 & -x_1 & +3y_1\\
& & \multicolumn{3}{l}{x_1, \ldots, x_4, y_1 \geq 0.}
\end{array}$$

8. Il grafo risulta avere due componenti connesse $T_1 = \{a, c, d, e, g\}$, $T_2 = \{b, f, h, i\}$, ed è bipartito, con classi di bipartizione $V_1 = \{a, g, b, f\}$, $V_2 = \{c, d, e, h, i\}$.