COMPITO DI RICERCA OPERATIVA

ESERCIZIO 1. (5 punti) Dato un problema di PL, la sua riformulazione rispetto alla base $B = \{x_3, x_4, x_5\}$ é la seguente:

$$
\begin{array}{ll}
\max & 8 - 5x_1 - 3x_2 \\
& x_3 = 1 + 4x_1 + x_2 \\
& x_4 = -1 - x_1 + x_2 \\
& x_5 = 5 - x_1 - x_2 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

Solo osservando tale riformulazione, dire se sono vere o false le seguenti affermazioni (**MOTIVARE LA RISPOSTA**)

(1) la base B é ammissibile per il primale;
(2) dalla riformulazione possiamo concludere che il primale ha regione ammissibile vuota;
(3) la base B é ammissibile per il duale;
(4) dalla riformulazione possiamo concludere che il primale ha valore ottimo pari a 8;
(5) dalla riformulazione possiamo concludere che il duale ha valore ottimo pari a 8.

ESERCIZIO 2. (5 punti) Sia dato il seguente problema di PL:

$$
\begin{array}{ll}
\max & 2x_1 - x_2 \\
& -x_1 + x_3 = 1 \\
& x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\
& 2x_1 - x_2 + x_5 = 5 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

Se ne determini il valore ottimo e *tutte* le soluzioni ottime.

ESERCIZIO 3. (4 punti) Il duale di un problema di PL in forma standard é il seguente

$$
\begin{array}{ll}
\min & -3u_1 - 4u_2 \\
& u_1 + u_2 \geq 2 \\
& u_1 - u_2 \geq 1 \\
& -u_1 + u_2 \geq -2 \\
& -u_1 - u_2 \geq -3
\end{array}
$$

e ha soluzione ottima

$$u_1^* = 2 \quad u_2^* = 1.$$

Si scriva il primale e, *utilizzando le condizioni di complementaritá*, si ricavi la sua soluzione ottima.

ESERCIZIO 4. (3 punti) Il problema di PL

$$
\begin{array}{ll}
\max & 2x_1 + x_2 \\
& x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\
& -x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\
& x_1 + x_2 + x_5 = 6 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

ha la seguente riformulazione rispetto alla base ottima $B^* = \{x_1, x_4, x_2\}$:

$$\begin{array}{ll} \max & \frac{21}{2} - \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_5 \\ & x_1 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5 \\ & x_4 = 7 - x_3 \\ & x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

In quale intervallo posso far variare la modifica Δb_1 del termine noto del primo vincolo senza che cambi la base ottima?

ESERCIZIO 5. (5 punti) Sia dato il seguente problema di PLI:

$$\begin{array}{ll} \max & x_2 - x_1 \\ & x_1 + x_2 \leq \frac{7}{2} \\ & -x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \qquad x_1, x_2 \in I \end{array}$$

Dopo averlo trasformato in forma standard (*con le dovute cautele trattandosi di un problema di PLI*), lo si risolva con l'algoritmo branch-and-bound.

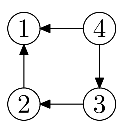
ESERCIZIO 6. (4 punti) Sia data la rete con i seguenti valori b_i, $i = 1, \ldots, 4$:

$$b_1 = 1 \quad b_2 = 0 \quad b_3 = -1 \quad b_4 = 0$$

e i seguenti costi unitari di trasporto lungo gli archi:

$$c_{21} = 3 \;\; c_{32} = 5 \;\; c_{41} = 4 \;\; c_{43} = 5.$$

Si dimostri, *utilizzando il metodo due fasi per i problemi di flusso a costo minimo*, che questo problema ha regione ammissibile vuota.



ESERCIZIO 7. (4 punti) Si enunci il Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare e si spieghi come questo viene sfruttato nella definizione di algoritmi di risoluzione per i problemi di PL.

ESERCIZIO 8. (4 punti) Sia dato un problema di PLI, indicato con $\mathbf{P}$, con regione ammissibile Z_a e sia $\mathbf{P}'$ il suo rilassamento lineare con regione ammissibile S_a. Per ciascuna delle seguenti affermazioni dire se é vera o falsa (**MOTIVARE LA RISPOSTA**):

(1) se S_a é un poliedro limitato e ha vertici a coordinate tutte intere, allora il valore ottimo di $\mathbf{P}$ é strettamente minore del valore ottimo di $\mathbf{P}'$;
(2) almeno un vertice di S_a é a coordinate tutte intere;
(3) un taglio valido per il problema $\mathbf{P}$ esclude sempre tutte le soluzioni ottime di $\mathbf{P}'$;
(4) se S_a é un poliedro limitato, allora Z_a contiene un numero finito di punti.

Soluzioni

1. Dalla riformulazione presentata si può dedurre quanto segue.
(1) FALSO, in quanto $x_4 < 0$ nella base B.
(2) FALSO. Dalla riformulazione si può ricavare, ad esempio ponendo $x_2 = 1$, la soluzione

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 0, x_5 = 4,$$

che non è di base ma è ammissibile, e quindi $S_a \neq \emptyset$.
(3) VERO. $\gamma_1, \gamma_5 \leq 0$, e questo corrisponde ad avere ammissibilità duale.
(4) FALSO; avendo ammissibilità duale ma non primale si può solo concludere $z^* \leq 8$.
(5) FALSO, altrimenti si concluderebbe $z^* = 8$, in contraddizione con il punto (4).

2. Il problema dato è già in forma standard. Applicando il metodo del simplesso si ottiene quanto segue.

$$\begin{array}{rrl}
\max & z = & 0 + 2x_1 - x_2 \\
& x_3 = & 1 + x_1 \\
& x_4 = & 2 - \mathbf{1}x_1 + x_2 \\
& x_5 = & 5 - 2x_1 + x_2 \\
& & x_1, \dots, x_5 \geq 0 \\
\max & z = & 4 - 2x_4 + x_2 \\
& x_3 = & 3 - x_4 + x_2 \\
& x_1 = & 2 - x_4 + x_2 \\
& x_5 = & 1 + 2x_4 - \mathbf{1}x_2 \\
& & x_1, \dots, x_5 \geq 0 \\
\max & z = & 5 \qquad - x_5 \\
& x_3 = & 4 + x_4 - x_5 \\
& x_1 = & 3 + x_4 - x_5 \\
& x_2 = & 1 + 2x_4 - x_5 \\
& & x_1, \dots, x_5 \geq 0
\end{array}$$

Le soluzioni ottime si trovano lungo la semiretta $(x_1 = 3+t, x_2 = 1+2t, x_3 = 4+t, x_4 = t, x_5 = 0)$.

3. Il primale è il "duale del duale", quindi esso è

$$\max\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -3 \\
&x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -4 \\
&x_1, \dots, x_4 \geq 0.
\end{aligned}$$

Avendo l'ottimo duale $u_1^* = 2, u_2^* = 1$, le condizioni di complementarietà permettono di ricavare

$$\begin{aligned}
u_1^* + u_2^* = 3 > 2 &\implies & x_1^* = 0, \\
u_1^* - u_2^* = 1, & & \\
-u_1^* + u_2^* = -1 > -2 &\implies & x_3^* = 0, \\
-u_1^* - u_2^* = -3. & &
\end{aligned}$$

L'ottimo primale deve soddisfare le condizioni

$$\begin{aligned}
x_2^* - x_4^* &= -3 \\
-x_2^* - x_4^* &= -4
\end{aligned}$$

e quindi l'ottimo è $x_1^* = 0, x_2^* = \frac{1}{2}, x_3^* = 0, x_4^* = \frac{7}{2}$, con $z^* = x_2^* - 3x_4^* = -10 = -3u_1^* - 4u_2^*$.

4. Dalla riformulazione ottima presentata si ricava

$$A_{B^*}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e quindi, applicando le tecniche note, le condizioni di ammissibilità

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta b_1 &\geq -\frac{9}{2} \\ \Delta b_1 &\geq -7 \quad \Longrightarrow \quad -7 \leq \Delta b_1 \leq 3. \\ -\frac{1}{2}\Delta b_1 &\geq -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

5. Il problema in forma standard è

$$\max \; x_2 - x_1$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ &-x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \text{interi.} \end{aligned}$$

La riformulazione ottima per il rilassamento lineare è la seguente.

$$\begin{array}{rrl} \max \; z = & \frac{7}{2} & -2x_1 - \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = & \frac{7}{2} & -x_1 - \frac{1}{2}x_3 \\ x_4 = & \frac{1}{2} & +2x_1 + \frac{1}{2}x_3 \\ & & x_1, \ldots, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Effettuando un branch sulla variabile x_2 si ottengono due nodi.

Nodo 1. $x_2 \leq 3 \implies -x_1 - \dfrac{1}{2}x_3 + y_1 = -\dfrac{1}{2}, y_1 \geq 0;$

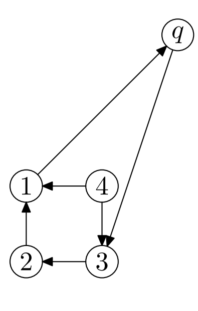
Nodo 2. $x_2 \geq 4 \implies -x_1 - \dfrac{1}{2}x_3 - y_2 = \dfrac{1}{2}, y_2 \geq 0.$

Il nodo 2 è chiaramente privo di soluzioni ammissibili. Calcolando il rilassamento lineare al nodo 1 si ottiene

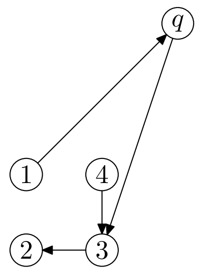
$$\begin{array}{rrl} \max \; z = & \frac{7}{2} & -2x_1 - \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = & \frac{7}{2} & -x_1 - \frac{1}{2}x_3 \\ x_4 = & \frac{1}{2} & +2x_1 + \frac{1}{2}x_3 \\ y_1 = & -\frac{1}{2} & +x_1 + \frac{1}{2}x_3 \\ & & x_1, \ldots, x_4, y_1 \geq 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rrll} \max \; z = & 3 & -y_1 & -x_1 \\ x_2 = & 3 & -y_1 & \\ x_4 = & 1 & +y_1 & -x_1 \\ x_3 = & 1 & +2y_1 & -2x_1 \\ & & x_1, \ldots, x_4, y_1 \geq 0 & \end{array}$$

La soluzione ottima è quindi $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 1, x_4 = 1$, con valore $z^* = 3$.

6. Il problema di prima fase corrisponde al seguente grafo, con $c_{1q} = c_{q3} = 1$, $c_{21} = c_{32} = c_{41} = c_{43} = 0$.



Scegliendo la base iniziale $B_0 = \{(1,q),(q,3),(3,2),(4,3)\}$ con $x_{1q} = x_{q3} = 1$, $x_{32} = x_{43} = 0$ si ottengono costi ridotti $\bar{c}_{21} = \bar{c}_{41} = 2$, che certificano l'ottimalità della base.



Si ha però $z^* = 2 > 0$, quindi il problema originale è privo di soluzioni ammissibili.

7. Per l'enunciato completo si faccia riferimento agli appunti. L'importanza del Teorema Fondamentale della PL, risiede nel fatto che esso garantisce che

se $S_{\text{ott}} \neq \emptyset$*, esso contiene almeno una soluzione di base;*

quindi, senza perdita di ottimalità, la ricerca di una soluzione ottima può limitarsi all'insieme — *finito* — delle sole soluzioni di base ammissibili(=vertici di S_a) di un problema di PL. Senza questo risultato non sarebbe possibile neanche stabilire la *correttezza* dell'algoritmo del simplesso.

8. Si può dire quanto segue.

(1) FALSO. Con le premesse date, il Teorema Fondamentale della PL garantisce che un ottimo di $\mathbf{P}'$ si trovi su un vertice di S_a, che per ipotesi ha coordinate intere. Allora chiaramente i valori ottimi per $\mathbf{P}$ e $\mathbf{P}'$ coincidono.

(2) FALSO. Si può dare facilmente un controesempio con

$$S_a = \{x_1, x_2 \geq 0 \colon 1 \leq 2x_1 \leq 3, 1 \leq 2x_2 \leq 3\}\,,$$
$$Z_a = \{(1,1)\}\,.$$

(3) FALSO. Per definizione, ne esclude almeno una.

(4) VERO, essendo Z_a discreto e limitato in quanto sottoinsieme di S_a.