COMPITO DI RICERCA OPERATIVA

ESERCIZIO 1. (5 punti) Sia dato il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{ll} \min & -2x_1 - 4x_2 \\ & x_1 + x_2 \geq -2 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 3 \\ & x_1 - x_2 \geq -1 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \leq 0 \end{array}$$

Lo si trasformi in forma standard e lo si risolva determinandone il valore ottimo e una soluzione ottima.

ESERCIZIO 2. (4 punti) Dopo averlo trasformato in forma standard, si risolva il seguente problema di PL con l'algoritmo piú opportuno:

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ & x_1 - x_2 - 2x_3 \geq 3 \\ & -2x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

ESERCIZIO 3. (5 punti) Sia dato il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{ll} \max & 5x_1 + 2x_2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ & -2x_1 - x_2 - x_4 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Se ne scriva il duale, lo si risolva per via grafica e sulla base del risultato ottenuto si risolva anche il primale.

ESERCIZIO 4. (3 punti) La riformulazione rispetto alla base ottima $B^* = \{x_2, x_1, x_5\}$ di un problema di PL é la seguente:

$$\begin{array}{ll} \max & 5 - 3x_3 - 4x_4 \\ & x_2 = 6 - 5x_3 + 2x_4 \\ & x_1 = 4 + x_3 - x_4 \\ & x_5 = 2 - x_3 + x_4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

In quale intervallo posso far variare la modifica Δc_3 del coefficiente di x_3 nell'obiettivo senza che cambi la base ottima? E in quale intervallo posso far variare la modifica Δc_2 del coefficiente di x_2 nell'obiettivo senza che cambi la base ottima? In entrambi i casi si dica come varia il valore ottimo negli intervalli individuati.

ESERCIZIO 5. (5 punti) Sia dato il seguente problema di PLI:

$$\begin{array}{ll} \max & x_2 \\ & 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ & -x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in I \end{array}$$

Risolvendo il suo rilassamento lineare, si arriva alla seguente riformulazione rispetto alla base ottima $B^* = \{x_1, x_2\}$:

$$\begin{array}{rl} \max & \frac{7}{2} - \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 \\ & x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \\ & x_2 = \frac{7}{2} - \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Si risolva il problema di PLI con l'algoritmo branch-and-bound.

ESERCIZIO 6. (4 punti) Si risolva lo stesso problema di PLI dell'esercizio precedente con l'algoritmo di taglio di Gomory.

ESERCIZIO 7. (4 punti) A tre distinte azioni A1, A2 e A3 sono associate tre variabili binarie x_1, x_2 e x_3 che assumono il valore 1 se decidiamo di compiere l'azione corrispondente e 0 altrimenti. Si esprima con un vincolo ciascuna delle seguenti condizioni:

(1) se si decide di non eseguire sia l'azione A1 che l'azione A2, allora si deve eseguire l'azione A3;
(2) se si decide di eseguire sia l'azione A1 che l'azione A2, allora non si deve eseguire l'azione A3;
(3) se si decide di eseguire l'azione A1 e non eseguire l'azione A2, allora non si deve eseguire l'azione A3;
(4) se all'esecuzione di ciascuna delle tre azioni associate un costo pari rispettivamente a c_1, c_2 e c_3, come esprimereste il vincolo che il costo totale delle azioni eseguite non puó superare un budget prefissato B?

ESERCIZIO 8. (4 punti) Si mostrino opportuni esempi di problema di flusso a costo minimo con:

(1) regione ammissibile vuota;
(2) obiettivo illimitato;
(3) soluzione ottima unica;
(4) insieme di soluzioni ottime con più di un elemento.

Soluzioni

1. Il problema in forma standard è

$$-\max\ 2x_1 - 4x_2'$$

soggetto a

$$-x_1 + x_2' + x_3 = 2$$
$$2x_1 + x_2' + x_4 = 3$$
$$-x_1 - x_2' + x_5 = 1$$
$$x_1, \dots, x_5 \geq 0.$$

Applicando l'algoritmo del simplesso si ottiene quanto segue.

$$\begin{array}{rl} -\max\ z = & 0 + 2x_1 - 4x_2' \\ x_3 = & 2 + x_1 - x_2' \\ x_4 = & 3 - \mathbf{2}x_1 - x_2' \\ x_5 = & 1 + x_1 + x_2' \\ & x_1, \dots, x_5 \geq 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rl} -\max\ z = & 3 - x_4 - 5x_2' \\ x_3 = & \frac{7}{2} - \frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_2' \\ x_1 = & \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_2' \\ x_5 = & \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_2' \\ & x_1, \dots, x_5 \geq 0 \end{array}$$

La soluzione ottima è quindi $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 0, x_3 = \frac{7}{2}, x_4 = 0, x_5 = \frac{5}{2}$ e il valore ottimo è pari a -3.

2. Il problema in forma standard è

$$-\max -2x_1 - 3x_2 - 5x_3$$

soggetto a

$$x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 3$$
$$-2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 1$$
$$x_1, \dots, x_5 \geq 0.$$

Conviene applicare il simplesso duale.

$$\begin{array}{rl} -\max\ z = & 0 - 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 \\ x_4 = & -3 + \mathbf{1}x_1 - x_2 - 2x_3 \\ x_5 = & -1 - 2x_1 + x_2 + x_3 \\ & x_1, \dots, x_5 \geq 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rl} -\max\ z = & -6 - 2x_4 - 5x_2 - 9x_3 \\ x_1 = & 3 + x_4 + x_2 + 2x_3 \\ x_5 = & -7 - 2x_4 - x_2 - 3x_3 \\ & x_1, \dots, x_5 \geq 0 \end{array}$$

La riga di x_5 verifica la condizione di illimitatezza duale, quindi il problema in esame è privo di soluzioni ammissibili.

3. Il problema duale risulta

$$\min\ -u_1 + u_2$$

soggetto a

$$u_1 - 2u_2 \geq 5$$
$$u_1 - u_2 \geq 2$$
$$u_1 \geq 0$$
$$-u_2 \geq 0$$

Si può verificare (anche graficamente) che il duale è illimitato: lungo la semiretta $u_1 = 5 + t$, $u_2 = 0$, $t \geq 0$ si trovano soluzioni con valore arbitrariamente piccolo. Il primale è dunque privo di soluzioni ammissibili.

4. Dall'analisi dei costi ridotti risulta immediatamente

$$-\infty < \Delta c_3 \leq 3;$$

in questo caso il valore ottimo non cambia mai. Per Δc_2, essendo x_2 in base, occorre considerare la funzione obiettivo riformulata e perturbata

$$\begin{aligned} z = & \Delta c_2 x_2 + (5 - 3x_3 - 4x_4) = \\ = & (5 + 6\Delta c_2) - (3 + 5\Delta c_2)x_3 + (2\Delta c_2 - 4)x_4 \end{aligned}$$

e quindi le condizioni di ottimalità richiedono

$$\begin{array}{l} -3-5\Delta c_2 \le 0 \\ -4+2\Delta c_2 \le 0 \end{array} \implies -\frac{3}{5} \le \Delta c_2 \le 2.$$

In questo caso la variazione del valore ottimo è data dalla formula $5+6\Delta c_2$.

5. Effettuando il branch sulla variabile x_1 si ottengono due nodi.

$$\textbf{Nodo 1.}\quad x_1 \le 0 \implies -\frac{1}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4+y_1=-\frac{1}{2},\quad y_1 \ge 0,$$

$$\textbf{Nodo 2.}\quad x_1 \ge 1 \implies -\frac{1}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4-y_2=\frac{1}{2},\quad y_2 \ge 0.$$

Calcolando il rilassamento lineare al nodo 1 si ottiene

$$\begin{array}{rl} \max\ z = & \frac{7}{2}-\frac{1}{4}x_3-\frac{3}{4}x_4 \\ x_1 = & \frac{1}{2}-\frac{1}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4 \\ x_2 = & \frac{7}{2}-\frac{1}{4}x_3-\frac{3}{4}x_4 \\ y_1 = & -\frac{1}{2}+\mathbf{\frac{1}{4}}x_3-\frac{1}{4}x_4 \\ & x_1,\dots,x_4,y_1 \ge 0 \end{array} \implies \begin{array}{rl} \max\ z = & 3-y_1-x_4 \\ x_1 = & 0-y_1 \\ x_2 = & 3-y_1-x_4 \\ x_3 = & 2+4y_1+x_4 \\ & x_1,\dots,x_4,y_1 \ge 0 \end{array}$$

e quindi LB $=U_1=3$. Al nodo 2 risulta

$$\begin{array}{rl} \max\ z = & \frac{7}{2}-\frac{1}{4}x_3-\frac{3}{4}x_4 \\ x_1 = & \frac{1}{2}-\frac{1}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4 \\ x_2 = & \frac{7}{2}-\frac{1}{4}x_3-\frac{3}{4}x_4 \\ y_2 = & -\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x_3+\mathbf{\frac{1}{4}}x_4 \\ & x_1,\dots,x_4,y_2 \ge 0 \end{array} \implies \begin{array}{rl} \max\ z = & 2-x_3-3y_2 \\ x_1 = & 1+y_2 \\ x_2 = & 2-x_3-3y_2 \\ x_4 = & 2+x_3+4y_2 \\ & x_1,\dots,x_4,y_1 \ge 0 \end{array}$$

e quindi il nodo viene chiuso in quanto $U_2=2 \le$ LB. La soluzione ottima è $x_1=0$, $x_2=3$, $x_3=2$, $x_4=0$.

6. Il taglio di Gomory associato alla riga di x_1 nella riformulazione ottima del rilassamento lineare è

$$\frac{1}{4}x_3+\frac{3}{4}x_4 \ge \frac{1}{2} \implies \frac{1}{4}x_3+\frac{3}{4}x_4-y_1=\frac{1}{2},\quad y_1 \ge 0.$$

Inserendolo nella riformulazione si ottiene

$$\begin{array}{rl} \max\ z = & \frac{7}{2}-\frac{1}{4}x_3-\frac{3}{4}x_4 \\ x_1 = & \frac{1}{2}-\frac{1}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4 \\ x_2 = & \frac{7}{2}-\frac{1}{4}x_3-\frac{3}{4}x_4 \\ y_1 = & -\frac{1}{2}+\mathbf{\frac{1}{4}}x_3+\frac{3}{4}x_4 \\ & x_1,\dots,x_4,y_1 \ge 0 \end{array} \implies \begin{array}{rl} \max\ z = & 3-y_1 \\ x_1 = & 0-y_1+x_4 \\ x_2 = & 3-y_1 \\ x_3 = & 2+4y_1-3x_4 \\ & x_1,\dots,x_4,y_1 \ge 0 \end{array}$$

con la stessa soluzione ottima determinata nell'esercizio precedente.

7. (1) $x_3 \ge 1-(x_1+x_2)$
(2) $x_3 \le 2-(x_1+x_2)$
(3) $x_3 \le (1-x_1)+x_2$
(4) $c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3 \le B$

8. Si possono considerare i seguenti esempi (costi sugli archi, se necessari).