COMPITO DI RICERCA OPERATIVA

ESERCIZIO 1. (5 punti) Sia dato il seguente problema di PL:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ & -x_2 + 2x_3 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Utilizzando il metodo due fasi, si stablisca se esso ha regione ammissibile vuota oppure no e se contiene vincoli ridondanti, ovvero ottenibili come combinazioni lineari degli altri vincoli.

ESERCIZIO 2. (5 punti) Si consideri la riformulazione rispetto alla base ottima $B^* = \{x_3, x_4\}$ di un problema di PL:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3 - x_1 - x_2 \\ & x_3 = 1 - x_2 \\ & x_4 = 1 + x_1 - x_2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Per ciascuna delle seguenti richieste si modifichi un singolo coefficiente della riformulazione in modo tale da soddisfarla:

- rendere l'obiettivo del duale illimitato (1 punto);
- rendere la regione ammissibile del duale vuota (2 punti);
- rendere la regione ammissibile del primale un politopo (2 punti) (SUGGERIMENTO: si faccia in modo che tutte le variabili debbano avere valore ≤ 1 nella regione ammissibile)

ESERCIZIO 3. (5 punti) Si risolva graficamente il seguente problema di PL:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + x_2 \leq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

dandone soluzione ottima e valore ottimo. Si stabilisca *sempre per via grafica* in quale intervallo posso far variare il coefficiente di x_1 nell'obiettivo senza che cambi la soluzione ottima. Posso anche trovare una modifica di tale coefficiente che renda l'obiettivo illimitato? (**MOTIVARE LA RISPOSTA**)

ESERCIZIO 4. (5 punti) La riformulazione rispetto alla base ottima $B^* = \{x_1, x_2\}$ del rilassamento lineare di un problema di PLI è la seguente:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3 - 4x_3 - 5x_4 \\ & x_1 = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}x_4 \\ & x_2 = \tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{1}{4}x_4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Si provi ad utilizzare come equazione generatrice del taglio di Gomory sia l'equazione relativa a x_1 che quella relativa a x_2 e in base ai risultati ottenuti si decida quale delle due sia la migliore dal punto di vista della risoluzione del problema di PLI.

ESERCIZIO 5. (5 punti) Sia dato il problema del trasporto con 2 depositi e 3 negozi in cui:

$$a_1 = 30 \quad a_2 = 20 \quad b_1 = 20 \quad b_2 = 20 \quad b_3 = 20$$

e i seguenti costi unitari di trasporto lungo gli archi:

	$N1$	$N2$	$N3$
$D1$	2	3	3
$D2$	1	1	2

Lo si risolva restituendone una soluzione ottima e il valore ottimo. Poi si modifichi un singolo costo di trasporto unitario in modo tale che la soluzione trovata non sia più ottima.

ESERCIZIO 6. (5 punti) Per ciascuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa **motivando la risposta**:

(1) la regione ammissibile non vuota di un problema di PL in forma canonica può non contenere vertici ma contiene certamente almeno un raggio estremo;
(2) in un problema di PL con base ottima B^*, se modifico un coefficiente nei vincoli di una variabile della base ottima, allora B^* può non essere più base ottima ma continua ad essere certamente ammissibile per il primale;
(3) negli algoritmi branch-and-bound, a parità di tempi di calcolo per due procedure che calcolano upper bound, è preferibile quella che restituisce valori di upper bound più piccoli;
(4) in un algoritmo di taglio, l'aggiunta di un taglio determina un valore ottimo del nuovo rilassamento lineare maggiore o al più uguale rispetto a quello del rilassamento lineare precedente;
(5) Nell'algoritmo del simplesso duale posso arrestarmi stabilendo che il primale ha obiettivo illimitato.

ESERCIZIO 7. (3 punti) Dato un problema di PL

$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{cx} \\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

con soluzione ottima $\mathbf{x}^*$, si dimostri che non è possibile rendere il suo obiettivo illimitato modificandone il vettore di termini noti (SUGGERIMENTO: si rifletta sul duale).

Soluzioni

1. Il problema di prima fase è

$$\max\ -s_1 - s_2 - s_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &x_1 - 2x_2 + x_3 + s_1 = 4\\ &x_1 - x_2 - x_3 + s_2 = 3\\ &\quad - x_2 + 2x_3 = 1\\ &x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Applicando l'algoritmo del simplesso si ottiene quanto segue.

$$\begin{array}{llrrrr} \max & z = & -7 & +2x_2 & -4x_2 & +2x_3 \\ & s_1 = & 4 & -x_1 & +2x_2 & -x_3 \\ & s_2 = & 3 & -\mathbf{1}x_1 & +x_2 & +x_3 \\ & s_3 = & 1 & & +x_2 & -2x_3 \\ & \multicolumn{5}{c}{x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0} \end{array}$$

$$\begin{array}{llrrrr} \max & z = & -2 & & -2x_2 & +4x_3 \\ & s_1 = & 1 & +s_2 & +x_2 & -2x_3 \\ & x_1 = & 3 & -s_2 & +x_2 & +\mathbf{1}x_3 \\ & s_3 = & 1 & & +x_2 & -2x_3 \\ & \multicolumn{5}{c}{x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0} \end{array}$$

$$\begin{array}{llrrrr} \max & z = & 0 & +s_2 & & -s_1 \\ & x_3 = & \frac{1}{2} & +\frac{1}{2}s_2 & +\frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}s_1 \\ & x_1 = & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2}s_2 & +\frac{3}{2}x_2 & -\frac{1}{2}s_1 \\ & s_3 = & 0 & -s_2 & & +s_1 \\ & \multicolumn{5}{c}{x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0} \end{array}$$

Anche se la base non è ottima, il valore dell'obiettivo è già pari a 0, quindi il problema originale ha $S_a \neq \emptyset$. Inoltre l'equazione $s_3 = -s_2 + s_1$ indica che il terzo vincolo può essere ottenuto sottraendo il secondo vincolo dal primo.

2. .Nei tre casi è sufficiente porre rispettivamente:

- $x_3 = -1 - x_2$;
- $z = 3 + x_1 - x_2$;
- $x_4 = 1 - x_1 - x_2$.

3. La regione ammissibile S_a è riportata in Figura 1. Il punto di ottimo è OPT($x_1^* = 2, x_2^* = 2$), con $z^* = 6$. Le rette isoprofitto sono perpendicolari al vettore $(1, 2)$ — il gradiente della funzione obiettivo; variando il coefficiente di x_1 di una quantità Δc_1 si trasforma tale vettore in $(1+\Delta c_1, 2)$.

Lavorando graficamente si osserva che la retta isoprofitto passante per OPT continua a stabilire l'ottimalità di questo punto fintanto che

$$\begin{array}{l} 1 + \Delta c_1 \geq -2 \\ 1 + \Delta c_1 \leq 2 \end{array} \implies -3 \leq \Delta c_1 \leq 1.$$

Per $\Delta c_1 < -3$ risulta ottimo il vertice $(0, 0)$, mentre per $\Delta c_1 > 2$ risulta ottimo il vertice $(4, 0)$.

Poiché S_a è limitata, nessuna modifica ai coefficienti della funzione obiettivo può rendere il problema illimitato.

4. Dalle due righe in esame si ottengono rispettivamente i tagli

$$\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \geq \frac{1}{2} \tag{A}$$

$$\frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{4}x_4 \geq \frac{1}{2} \tag{B}$$

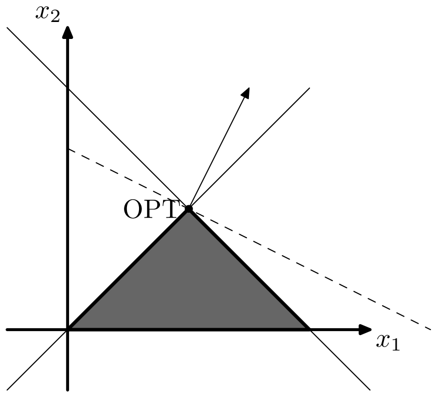

FIGURA 1. Regione ammissibile per l'esercizio 3.

Si può osservare che ogni coppia (x_1, x_2) che soddisfa (A) necessariamente soddisfa anche (B) — mentre non è necessariamente vero il contrario. Quindi il taglio (A) delimita una regione che è sottoinsieme di quella delimitata da (B). Questo rende il taglio (A) più stringente di (B), e quindi migliore. È adeguata anche una risposta basata sui risultati ottenuti aggiungendo i due tagli.

5. Aggiunto un deposito 3 con $a_3 = 10$ si ottiene il seguente problema bilanciato.

	1	2	3	a_i
1	2	3	3	30
2	1	1	2	20
3	0	0	0	10
b_j	20	20	20	

c_{ij}

Applicando il metodo dell'angolo NW e successivamente l'algoritmo del simplesso si ottiene:

	1	2	3	a_i
1	**20**	**10**$^-$	$+$	30
2		**10**$^+$	**10**$^-$	20
3			**10**	10
b_j	20	20	20	

x_{ij}

	1	2	3
1	**0**	**0**	-1
2	1	**0**	**0**
3	2	1	**0**

$\bar{c}_{ij}$

	1	2	3	a_i
1	**20**		**10**	30
2		**20**	**0**	20
3			**10**	10
b_j	20	20	20	

x_{ij}

	1	2	3
1	**0**	1	**0**
2	0	**0**	**0**
3	1	1	**0**

$\bar{c}_{ij}$

Ponendo $c_{21} = 0$ la soluzione non è più ottima.

6. Risposte:

(1) Falso. Se $S_a \neq \emptyset$, esso contiene almeno un vertice.
(2) Falso, perché la A_{B^*} viene modificata e B^* può addirittura non essere più una base.
(3) Vero. La condizione di chiusura dei nodi $\mathrm{UB}_i \leq \mathrm{LB}$ è più efficace se gli upper bound sono più stringenti.
(4) Falso. Il nuovo rilassamento ha ottimo non maggiore del precedente, in quanto si restringe la S_a.
(5) Falso. Per definizione il simplesso duale si applica in presenza di una soluzione duale-ammissibile, e questo impedisce che si possa avere un primale illimitato.

7. Si consideri la coppia primale-duale

$$\max\{\mathbf{cx} \colon \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \tag{P}$$

$$\min\{\mathbf{ub} \colon \mathbf{uA} \geq \mathbf{c}\} \tag{D}$$

Se (P) ha soluzione ottima finita $\mathbf{x}^*$, esiste un ottimo duale finito $\mathbf{u}^*$ che soddisfa $\mathbf{u}^*\mathbf{A} \geq \mathbf{c}$. Perturbando il vettore $\mathbf{b}$ la coppia primale-duale diventa

$$\max\{\mathbf{cx} \colon \mathbf{Ax} = \mathbf{b} + \boldsymbol{\Delta}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}\,, \tag{P$'$}$$

$$\min\{\mathbf{u}(\mathbf{b} + \boldsymbol{\Delta}) \colon \mathbf{uA} \geq \mathbf{c}\}\,. \tag{D$'$}$$

Si può osservare che $\mathbf{u}^*$ rimane ammissibile per (D$'$), e quindi è impossibile che (P*prime*) sia illimitato, qualunque sia la perturbazione $\boldsymbol{\Delta}$.