COMPITO DI RICERCA OPERATIVA

ESERCIZIO 1. (7 punti) Sia dato il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + 2x_2 \\ & x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 4 \\ & -2x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Lo si risolva con l'algoritmo che si ritiene più opportuno (3 punti). Dopo averlo risolto si risponda alle seguenti domande (**MOTIVANDO LA RISPOSTA**):

- cambia la soluzione ottima se aggiungo il vincolo $x_1 + x_3 \leq 2$? (2 punti)
- Cosa succede se aggiungo il vincolo $x_1 + x_3 \leq 1$? (2 punti)

ESERCIZIO 2. (7 punti) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{ll} \max & -2x_1 + x_2 \\ & 5x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ & -x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

(1) Se ne scriva il duale;
(2) si trasformi il duale in forma standard;
(3) si risolva il duale trasformato in forma standard con l'algoritmo che si ritiene più opportuno;
(4) si determini quindi una soluzione ottima del primale *utilizzando le condizioni di complementarità*.

ESERCIZIO 3. (6 punti) Si consideri il seguente problema di PLI:

$$\begin{array}{ll} \max & x_2 \\ & -6x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 7 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in I \end{array}$$

Dopo aver risolto il rilassamento lineare e aver fatto branching sulla variabile x_1, il problema risulta suddiviso in due sottoproblemi P_1 (aggiunta del vincolo $x_1 \leq 0$) e P_2 (aggiunta del vincolo $x_1 \geq 1$). Risolvendo i rilassamenti lineari di questi due sotoproblemi si arriva alle seguneti riformulazioni rispetto alla base ottima:

$$\begin{array}{lll} (P_1) & \max & \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_3 - y_1 \\ & & x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_3 - y_1 \\ & & x_1 = 0 - y_1 \\ & & x_4 = 4 + x_3 + 8y_1 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4, y_1 \geq 0 \end{array}$$

e

$$\begin{array}{lll} (P_2) & \max & \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_4 - y_1 \\ & & x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_4 - y_1 \\ & & x_1 = 1 + y_1 \\ & & x_3 = 4 + x_4 + 8y_1 \\ & & x_1, x_2, x_3, x_4, y_1 \geq 0 \end{array}$$

A partire da queste informazioni, si risolva il problema di PLI utilizzando l'algoritmo branch-and-bound.

ESERCIZIO 4. (5 punti) Per ciascuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa **motivando la risposta**:

(1) se una regione ammissibile di un problema di PL ha un raggio estremo, allora posso sempre modificare la funzione obiettivo in modo che il problema abbia obiettivo illimitato;
(2) l'algoritmo del simplesso ad ogni iterazione si sposta sempre da un vertice ad un altro vertice distinto adiacente;
(3) nel metodo due fasi, qualora il problema di II fase abbia regione ammissibile non vuota, il problema di I fase ha sempre almeno una base ottima che non contiene alcuna delle variabili s aggiunte in tale problema;
(4) dato un nodo di un albero di branch-and-bound, se facessi branching rispetto a una variabile che ha valore intero nella soluzione ottima del rilassamento lineare di tale nodo, allora uno dei due sottoproblemi avrebbe upper bound uguale a quello di tale nodo;
(5) dato un problema di PL con base ottima B^*, se ne modifico i coefficienti nell'obiettivo posso far perdere l'ammissibilità duale ma non quella primale.

ESERCIZIO 5. (5 punti) Siano dati quattro prodotti A, B, C e D. Ciascuna unità di tali prodotti ha un apporto di proteine e vitamina C e un costo che sono riportati nella seguente tabella:

	A	B	C	D
proteine	3	5	8	2
vitamina C	5	2	6	7
costo unitario	15	20	18	30

Si vuole stabilire quale quantità di ciascun prodotto realizzare in modo tale da minimizzare i costi e tenuto conto che le proteine complessive non devono superare 50 e la vitamina C complessiva deve essere almeno 30. Si costruisca il modello matematico di questo problema.

ESERCIZIO 6. (3 punti) Sia dato un problema del trasporto in cui il costo unitario di trasporto tra un certo deposito i e un certo negozio j è pari a 0, mentre tutti gli altri costi unitari di trasporto sono strettamente positivi. Si stablisca se è vero che esiste sempre almeno una soluzione ottima di tale problema in cui si trasporta una quantità di prodotto strettamente positiva dal deposito i al negozio j.

Soluzioni

1. Applicando l'algoritmo del simplesso a pertire dalla base iniziale $\{x_3, x_4\}$ si ottiene quanto segue.

$$\begin{array}{lrrrr} \max & z = & 0 & +3x_1 & +2x_2 \\ & x_3 = & 4 & -\mathbf{1}x_1 & -\frac{1}{2}x_2 \\ & x_4 = & 3 & +2x_1 & -x_2 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, \ldots, x_4 \geq 0} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrr} \max & z = & 12 & -3x_3 & +\frac{1}{2}x_2 \\ & x_1 = & 4 & -x_3 & -\frac{1}{2}x_2 \\ & x_4 = & 11 & -2x_3 & -\mathbf{2}x_2 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, \ldots, x_4 \geq 0} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrr} \max & z = & \frac{59}{4} & -\frac{7}{2}x_3 & -\frac{1}{4}x_4 \\ & x_1 = & \frac{5}{4} & -\frac{1}{2}x_3 & +\frac{1}{4}x_4 \\ & x_2 = & \frac{11}{2} & -x_3 & -\frac{1}{2}x_4 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, \ldots, x_4 \geq 0} \end{array}$$

Ls soluzione ottima è quindi $(x_1^* = \frac{5}{4}, x_2^* = \frac{11}{2}, x_3^* = x_4^* = 0)$.

- Il vincolo $x_1 + x_3 \leq 2$ è soddisfatto dalla soluzione ottima trovata, quindi aggiungerlo alla formulazione non ne modifica l'ottimalità e l'ammissibilità.
- Il vincolo $x_1 + x_3 \leq 1$ è *violato* dalla soluzione ottima, quindi aggiungerlo alla formulazione induce una violazione dell'ammissibilità primale. Esprimendo il vincolo come

  $$x_1 + x_3 \leq 1 \iff \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}x_4 + y = -\frac{1}{4},\ y \geq 0$$

  si può osservare immediatamente che il problema così modificato risulta privo di soluzioni ammissibili.

2. (1) Il duale del problema considerato è

$$\min\ 3u_1 + 4u_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &5u_1 - u_2 \geq -2 \\ &u_1 + u_2 \geq 1 \\ &u_1 \geq 0 \\ &u_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(2) In forma standard:

$$-\max\ -3u_1 - 4u_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &-5u_1 + u_2 + u_3 = 2 \\ &u_1 + u_2 - u_4 = 1 \\ &u_1, \ldots, u_4 \geq 0. \end{aligned}$$

(3) Applicando l'algoritmo del simplesso duale a partire dalla base $\{u_3, u_4\}$ si ottiene quanto segue.

$$\begin{array}{rrrrr} -\max & w = & 0 & -3u_1 & -4u_2 \\ & u_3 = & 2 & +5u_1 & -u_2 \\ & u_4 = & -1 & +\mathbf{1}u_1 & +u_2 \\ & & \multicolumn{3}{l}{u_1, \ldots, u_4 \geq 0} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} -\max & w = & -3 & -3u_4 & -u_2 \\ & u_3 = & 7 & +5u_4 & -6u_2 \\ & u_1 = & 1 & +u_4 & -u_2 \\ & & \multicolumn{3}{l}{u_1, \ldots, u_4 \geq 0} \end{array}$$

L'ottimo duale è quindi $(u_1^* = 1, u_2^* = 0)$.

(4) Riferendosi al duale in forma canonica e applicando le condizioni di complementarietà si deduce, per la soluzione ottima primale:

$$\begin{aligned} 5u_1^* - u_2^* > -2 &\implies x_1^* = 0, \\ u_1^* + u_2^* = 1 &\implies x_2^* \geq 0, \\ u_1^* > 0 &\implies x_3^* = 0, \\ u_2^* = 0 &\implies x_4^* \geq 0. \end{aligned}$$

Sostituendo nei vincoli del primale, risulta che la soluzione ottima deve soddisfare

$$\begin{array}{l} x_1^* = 0, x_3^* = 0 \\ x_2^* = 3 \\ x_2^* + x_4^* = 4 \end{array} \implies \begin{array}{l} x_1^* = 0, \\ x_2^* = 3, \\ x_3^* = 0, \\ x_4^* = 1. \end{array}$$

Si noti che $z^* = -2x_1^* + x_2^* = 3 = 3u_1^* + 4u_2^* = w^*$, come previsto dai risultati noti sulla dualità.

3. Effettuando un branch su P_2 (che ha l'upper bound maggiore) si generano i nodi $P_3(x_2 \leq 2)$ e $P_4(x_2 \geq 3)$. Da un'esame della riformulazione di P_2 risulta subito che il nodo P_4 è privo di soluzioni ammissibili. Per P_3 risulta quanto segue.

$$x_2 \leq 2 \iff \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_4 - y_1 + y_2 = 2,\ y_2 \geq 0$$

$$\begin{array}{rrrrr} \max & z = & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2}x_4 & -y_1 \\ & x_2 = & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2}x_4 & -y_1 \\ & x_1 = & 1 & & +y_1 \\ & x_3 = & 4 & +x_4 & +8y_1 \\ & y_2 = & -\frac{1}{2} & +\mathbf{\frac{1}{2}}x_4 & +y_1 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, \ldots, x_4, y_1, y_2 \geq 0} \end{array} \implies \begin{array}{rrrrr} \max & z = & 2 & -y_2 & \\ & x_2 = & 2 & -y_2 & \\ & x_1 = & 1 & & +y_1 \\ & x_3 = & 5 & +2y_2 & +6y_1 \\ & x_4 = & 1 & +2y_2 & -2y_1 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, \ldots, x_4, y_1, y_2 \geq 0} \end{array}$$

La soluzione intera $(x_1^* = 1, x_2^* = 2, x_3^* = 5, x_4^* = 1)$ di valore $z = 2$ chiude il nodo P_3 per ottimalità, e anche il nodo P_1 per bound, in quanto $U(P_1) \leq z$. Si tratta quindi della soluzione ottima.

4. (1) Vero. Se $\mathbf{r}$ è il vettore che dà la direzione del raggio estremo, è sufficiente porre $z = \mathbf{rx}$ (in un problema di massimizzazione).
(2) Falso. Nel caso di basi degeneri può ciclare sullo stesso vertice (passa ad un vertice coincidente).
(3) Falso. Se il problema di seconda fase ha vincoli ridondanti, almeno una variabile artificiale non si riesce ad eliminare.
(4) Vero. Almeno un nodo figlio sarebbe identico al padre.
(5) Vero. L'ammissibilità primale non dipende dai coefficienti della funzione obiettivo.

5. Si introducano le variabili non negative x_A, x_B, x_C, x_D che rappresentano i quantitativi dei vari alimenti nel mix. Il problema è quindi modellabile come segue.

$$\min\ 15x_A + 20x_B + 18x_C + 30x_D$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
&3x_A + 5x_B + 8x_C + 2x_D \leq 50\\
&5x_A + 2x_B + 6x_C + 7x_D \geq 30\\
&x_A, x_B, x_C, x_D \geq 0.
\end{aligned}$$

6. Falso. Si consideri un problema 2×2 con $a_1 = a_2 = 10$, $b_1 = b_2 = 10$, $c_{12} = c_{21} = 1$, $c_{22} = 0$ e $c_{11} = 10$. La soluzione ottima è $(x_{12} = x_{21} = 10, x_{11} = x_{22} = 0)$.