COMPITO DI RICERCA OPERATIVA

ESERCIZIO 1. (6 punti) Si risolva il seguente problema di PL utilizzando l'algoritmo che si ritiene piú opportuno:

$$\begin{array}{ll} \max & -5x_1 - 2x_2 \\ & -x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ & -x_1 - x_2 + x_4 = -3 \\ & x_1 + x_2 + x_5 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

ESERCIZIO 2. (4 punti) Dato il problema di PL:

$$\begin{array}{ll} \max & -2x_1 + x_2 \\ & x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ & -x_1 + x_2 + x_4 = -1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

(1) se ne scriva il duale;
(2) lo si trasformi *in forma canonica* e lo si risolva per via grafica;
(3) *utilizzando le condizioni di complementaritá* si trovi una soluzione ottima del primale.

ESERCIZIO 3. (3 punti) Il seguente problema di PL

$$\begin{array}{ll} \max & -4x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ & -x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ & -2x_1 - x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

ha la seguente riformulazione rispetto alla base ottima $B^* = \{x_3, x_2, x_5\}$:

$$\begin{array}{ll} \max & 6 - x_1 - 3x_4 \\ & x_3 = 6 - 2x_1 + x_4 \\ & x_2 = 2 + x_1 - x_4 \\ & x_5 = 5 + 3x_1 - x_4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

In quale intervallo posso far variare la modifica Δc_1 del coefficiente di x_1 nell'obiettivo senza che cambi la base ottima? E in quale intervallo posso far variare la modifica Δc_2 del coefficiente di x_2 nell'obiettivo senza che cambi la base ottima?

ESERCIZIO 4. (4 punti) Sia data la seguente riformulazione rispetto alla base ottima $B^* = \{x_3, x_4\}$ del rilassamento lineare di un problema di PLI:

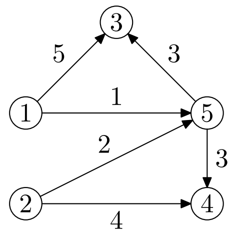
$$\begin{array}{ll} \max & 8 - x_1 - 2x_2 \\ & x_3 = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \\ & x_4 = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Si risolva il problema di PLI utilizzando l'algoritmo Branch-and-Bound.

ESERCIZIO 5. (4 punti) Si risolva lo stesso problema dell'esercizio precedente con l'algoritmo di taglio di Gomory.

ESERCIZIO 6. (4 punti) Sia data la rete in figura con i seguenti valori b_i, $i = 1, \ldots, 5$ e i costi unitari di trasporto riportati sugli archi.

$b_1 = 2$
$b_2 = 2$
$b_3 = -2$
$b_4 = -2$
$b_5 = 0$



Si verifichi che le variabili $x_{13}, x_{15}, x_{24}, x_{25}$ formano una base ammissibile per il problema di flusso a costo minimo su tale rete e si determini quindi a partire da tale base una soluzione ottima e il valore ottimo del problema.

ESERCIZIO 7. (4 punti) Il primo problema di decisione descritto a lezione é stato il seguente. Supponete di avere in casa un libro del valore di 10 Euro, una macchina fotografica del valore di 100 Euro e una borsa del valore di 25 Euro. Potete portare con voi al massimo uno degli oggetti e volete portare con voi il massimo valore possibile. Dimenticandosi la banalitá del problema, si costruisca un opportuno modello matematico per esso. A tale problema aggiungo poi il seguente vincolo: *se non porto con me la borsa, allora non posso portare con me neppure il libro.* Come inserireste tale ulteriore vincolo nel vostro modello matematico?

ESERCIZIO 8. (5 punti) Dato un problema di PL in forma canonica si illustrino con opportuni esempi le possibili forme della regione ammissibile S_a di tale problema e le possibili forme dell'insieme S_{ott} delle soluzioni ottime.

Soluzioni

1. Riformulando rispetto alla base $B_0 = \{x_3, x_4, x_5\}$ si ottengono condizioni di ammissibilità duale (ma non primale).

$$
\begin{array}{rrrrl}
\max \quad z = & 0 & -5x_1 & -2x_2 & \\
x_3 = & -4 & -x_1 & +\mathbf{1}x_2 & \\
x_4 = & -3 & +x_1 & +x_2 & \qquad B_0 = \{x_3, x_4, x_5\} \\
x_5 = & 1 & -x_1 & -x_2 & \\
 & & x_1, \dots, x_5 \geq 0 & &
\end{array}
$$

da cui con un passo di simplesso duale si ottiene

$$
\begin{array}{rrrrl}
\max \quad z = & -8 & -7x_1 & -2x_3 & \\
x_2 = & 4 & +x_1 & +x_3 & \\
x_4 = & 1 & +2x_1 & +x_3 & \qquad B_1 = \{x_2, x_4, x_5\}. \\
x_5 = & -3 & -2x_1 & -x_3 & \\
 & & x_1, \dots, x_5 \geq 0. & &
\end{array}
$$

Il problema è quindi privo di soluzioni ammissibili (condizione di illimitatezza duale sulla riga di x_5).

2. Il problema duale è

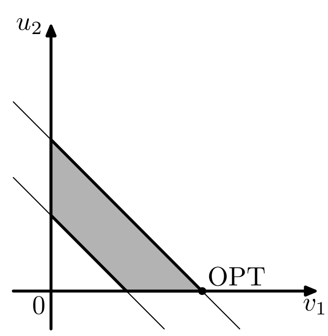
$$
\begin{array}{lrrl}
\min & 2u_1 & -u_2 & \\
\text{soggetto a} & & & \\
 & u_1 & -u_2 & \geq -2 \\
 & -u_1 & +u_2 & \geq 1 \\
 & -u_1 & & \geq 0 \\
 & & u_2 & \geq 0
\end{array}
$$

Portandolo in forma canonica occorre:

- introdurre un cambio di variabili $v_1 = -u_1$;
- trasformare il programma in uno di massimo, cambiando segno alla funzione obiettivo;
- moltiplicare per -1 i primi due vincoli.

Il programma in forma canonica è quindi il seguente.

$$
\begin{array}{lrrl}
\max & 2v_1 & +u_2 & \\
\text{soggetto a} & & & \\
 & v_1 & +u_2 & \leq 2 \\
 & -v_1 & -u_2 & \leq -1 \\
 & & v_1, u_2 & \geq 0.
\end{array}
$$



L'insieme D_a espresso nelle variabili v_1, u_2 è riportato in figura. Si ottiene quindi la soluzione ottima $v_1^* = 2$, $u_2^* = 0$, ovvero $u_1^* = -2$, $u_2^* = 0$.

Applicando le condizioni di complementarietà si ottiene

$$
\begin{aligned}
-u_1^* + u_2^* > -1 &\implies x_2^* = 0, \\
-u_1^* > 0 &\implies x_3^* = 0.
\end{aligned}
$$

La soluzione ottima primale deve quindi soddisfare

$$
\begin{aligned}
x_1^* &= 2 \\
-x_1^* + x_4^* &= -1
\end{aligned}
\implies x_1^* = 2, x_4^* = 1.
$$

Risulta $z^* = -2x_1^* = -4 = 2u_1^*$, come previsto dalla teoria.

3. L'intervallo di stabilità di c_1, essendo x_1 fuori dalla base ottima, è dato da

$$-\infty < \Delta c_1 \leq 1.$$

Per l'intervallo di stabilità di x_2 si impone la condizione di ottimalità per

$$\begin{aligned} z &= 6 - x_1 - 3x_4 + \Delta c_2 x_2 = \\ &= (6 + 2\Delta c_2) + (-1 + \Delta c_2)x_1 - (3 + \Delta c_2)x_4 \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{array}{l} -1 + \Delta c_2 \leq 0 \\ -3 - \Delta c_2 \leq 0 \end{array} \implies -3 \leq \Delta c_2 \leq -1.$$

4. Dal rilassamento lineare specificato si effettua l'operazione di branch sulla variabile x_3, ottenendo

$$\begin{array}{l} \textbf{Nodo 1.}\ \ x_3 \leq 1 \implies \dfrac{1}{3}x_1 + \dfrac{1}{3}x_2 + y_1 = -\dfrac{2}{3}, \quad y_1 \geq 0, \\ \textbf{Nodo 2.}\ \ x_3 \geq 2 \implies \dfrac{1}{3}x_1 + \dfrac{1}{3}x_2 - y_2 = \dfrac{1}{3}, \quad y_2 \geq 0. \end{array}$$

Il nodo 1 risulta chiaramente privo di soluzioni ammissibili. Al nodo 2, si ottiene quanto segue.

$$\begin{array}{rrrrr} \max & z = & 8 & -x_1 & -2x_2 \\ & x_3 = & \frac{5}{3} & +\frac{1}{3}x_1 & +\frac{1}{3}x_2 \\ & x_4 = & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3}x_1 & +\frac{2}{3}x_2 \\ & y_2 = & -\frac{1}{3} & +\boldsymbol{\frac{1}{3}}x_1 & +\frac{1}{3}x_2 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, \ldots, x_4, y_2 \geq 0} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} \max & z = & 7 & -3y_2 & -x_2 \\ & x_3 = & 2 & +y_2 & \\ & x_4 = & 2 & -y_2 & +x_2 \\ & x_1 = & 1 & +3y_2 & -x_2 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, \ldots, x_4, y_2 \geq 0} \end{array}$$

La soluzione $x_1^* = 1$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 2$, $x_4^* = 2$ è ottima per il PLI considerato.

5. Generando il taglio di Gomory sulla riga di x_3 si ottiene il vincolo

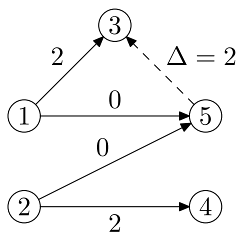
$$\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 \geq \frac{2}{3} \implies \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - y_1 = \frac{2}{3}, \quad y_1 \geq 0.$$

Si ottiene quindi quanto segue.

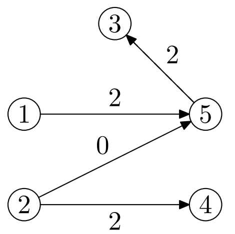
$$\begin{array}{rrrrr} \max & z = & 8 & -x_1 & -2x_2 \\ & x_3 = & \frac{5}{3} & +\frac{1}{3}x_1 & +\frac{1}{3}x_2 \\ & x_4 = & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3}x_1 & +\frac{2}{3}x_2 \\ & y_1 = & -\frac{2}{3} & +\boldsymbol{\frac{2}{3}}x_1 & +\frac{2}{3}x_2 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, \ldots, x_4, y_1 \geq 0} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} \max & z = & 7 & -\frac{3}{2}y_1 & -x_2 \\ & x_3 = & 2 & +\frac{1}{2}y_1 & \\ & x_4 = & 2 & -\frac{1}{2}y_1 & +x_2 \\ & x_1 = & 1 & +\frac{3}{2}y_1 & -x_2 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, \ldots, x_4, y_1 \geq 0} \end{array}$$

6. Imponendo il bilanciamento del flusso sull'albero spanning definito dalgi archi $\{(1,3),(1,5),(2,4),(2,5)\}$ si ottiene la seguente configurazione.



$$\bar{c}_{54} = c_{54} - c_{24} + c_{25} = 1$$
$$\bar{c}_{53} = c_{53} - c_{13} + c_{15} = -1$$



$$\bar{c}_{54} = c_{54} - c_{24} + c_{25} = 1$$
$$\bar{c}_{13} = c_{13} - c_{53} - c_{15} = 1$$

Il valore della soluzione ottima è

$$z^* = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 16.$$

7. Si definiscano le variabili binarie x_{L}, x_{M}, x_{B} che assumono valore 1 se e solo se si decide di portare rispettivamente il **L**ibro, la **M**acchina fotografica o la **B**orsa. Il modello comprensivo dei vincoli specificati è il seguente.

$$\max 10x_{\mathrm{L}} + 100x_{\mathrm{M}} + 25x_{\mathrm{B}}$$

soggetto a

$$x_{\mathrm{L}} + x_{\mathrm{M}} + x_{\mathrm{B}} \leq 1$$
$$x_{\mathrm{L}} \leq x_{\mathrm{B}}$$
$$x_{\mathrm{L}}, x_{\mathrm{M}}, x_{\mathrm{B}} \in \{0,1\}$$

8. Per questa risposta, fare riferimento agli appunti del corso.