ALGORITMO DEL SIMPLESSO

ESERCITAZIONI DI RICERCA OPERATIVA 1

ESERCIZIO 1. Risolvere il seguente programma lineare (a) con il metodo del simplesso e (b) con il metodo grafico.

$$\min\ -2x_1 - x_2 \tag{1}$$

soggetto a

$$x_1 + x_2 \leq 5 \tag{2}$$
$$3x_1 + x_2 \leq 9 \tag{3}$$
$$x_2 \leq 4 \tag{4}$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{5}$$

ESERCIZIO 2. Risolvere il seguente programma lineare (a) con il metodo del simplesso e (b) con il metodo grafico.

$$\max\ 3x_1 - x_2 \tag{6}$$

soggetto a

$$x_1 - x_2 \leq 1 \tag{7}$$
$$-x_1 + 2x_2 \geq 1 \tag{8}$$
$$-2x_1 + x_2 \leq 0 \tag{9}$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{10}$$

ESERCIZIO 3. Risolvere il seguente programma lineare utilizzando l'algoritmo del simplesso.

$$\max\ 3x_1 - x_2 + x_3 \tag{11}$$

soggetto a

$$2x_1 + x_2 \leq 6 \tag{12}$$
$$x_2 + 2x_3 \geq 4 \tag{13}$$
$$x_1 - x_3 \geq 3 \tag{14}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \tag{15}$$

ESERCIZIO 4. Risolvere il seguente programma lineare per mezzo dell'algoritmo del simplesso.

$$\min\ -2x_1 - 3x_2 \tag{16}$$

soggetto a

$$x_1 + 2x_2 \leq 4 \tag{17}$$

$$x_1 \leq 3 \tag{18}$$

$$2x_2 \leq 3 \tag{19}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{20}$$

ESERCIZIO 5. Risolvere il seguente programma lineare per mezzo dell'algoritmo del simplesso.

$$\max\ 2x_1 - x_2 \tag{21}$$

soggetto a

$$-x_1 + x_2 \leq 1 \tag{22}$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 2 \tag{23}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{24}$$

Soluzioni

1. (a) Prima di applicare il metodo del simplesso è indispensabile porre il programma lineare in *forma standard.* Per ottenere questo è necessario, in questo caso, trasformare (1)–(5) in un programma di minimo cambiando il segno della funzione obiettivo (1) e scrivere i vincoli (2)–(4) come uguaglianze utilizzando opportune variabili di slack x_3, x_4, x_5.

$$(1') \qquad \max\ 2x_1 + x_2$$

soggetto a

$$\begin{array}{ll}
(2') & x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\
(3') & 3x_1 + x_2 + x_4 = 9 \\
(4') & x_2 + x_5 = 4 \\
(5') & x_1, \dots, x_5 \geq 0
\end{array}$$

Grazie alla presenza delle variabili di slack, è immediatamente identificabile sul sistema dei vincoli una base ammissibile iniziale $B_0 = \{x_3, x_4, x_5\}$.

$$\begin{array}{rl}
\max\ z &= 0 + 2x_1 + x_2 \\
x_3 &= 5 - x_1 - x_2 \\
x_4 &= 9 - \mathbf{3}x_1 - x_2 \qquad B_0 = \{x_3, x_4, x_5\} \\
x_5 &= 4 - x_2 \\
& x_1, \dots, x_5 \geq 0
\end{array}$$

La presenza di costi ridotti $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ indica che la soluzione ammissibile di base associata a B_0 non è ottima; la variabile x_1, che presenta costo ridotto massimo, è idonea ad entrare in base. La variabile uscente è scelta con il criterio dei rapporti minimi, quindi

$$\min \left\{ \frac{5}{1}, \frac{9}{3} \right\} = \frac{9}{3}$$

indica che la variabile uscente è x_4. Effettuando l'operazione di cardine si ottiene la riformulazione rispetto alla nuova base B_1.

$$\begin{array}{rl}
\max\ z &= 6 - \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_2 \\
x_3 &= 2 + \frac{1}{3}x_4 - \boldsymbol{\frac{2}{3}}x_2 \\
x_1 &= 3 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_2 \qquad B_1 = B_0 \cup \{x_1\} \setminus \{x_4\} = \{x_3, x_1, x_5\} \\
x_5 &= 4 - x_2 \\
& x_1, \dots, x_5 \geq 0
\end{array}$$

Poiché $\gamma_2 > 0$ la soluzione associata a B_1 non è ottima, e si prosegue facendo entrare in base x_2. La variabile uscente è in questo caso x_3, alla quale corrisponde il minimo tra i rapporti

$$\frac{2}{2/3}, \frac{3}{1/3}, \frac{4}{1}.$$

Si ottiene quindi, effettuando l'operazione di cardine, la seguente riformulazione.

$$\begin{array}{rl}
\max\ z &= 7 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_3 \\
x_2 &= 3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_3 \\
x_1 &= 2 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_3 \qquad B_2 = B_1 \cup \{x_2\} \setminus \{x_3\} = \{x_2, x_1, x_5\} \\
x_5 &= 1 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{3}{2}x_3 \\
& x_1, \dots, x_5 \geq 0
\end{array}$$

La soluzione associata alla base B_2 è ottima, poiché sulla riformulazione $\gamma_4, \gamma_3 \geq 0$.

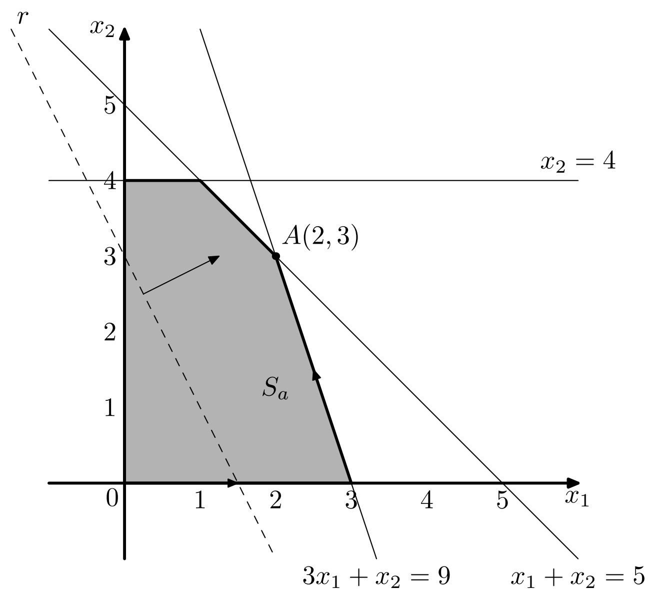

FIGURA 1. Risoluzione per via grafica dell'esercizio 1.

(b) Essendo (1)–(5) un programma in due sole variabili, è agevole utilizzare il metodo grafico. La Figura 1 rappresenta graficamente l'insieme S_a delle soluzioni ammissibili di (1)–(5); la retta tratteggiata r è una isocosto e la direzione di crescita è quella indicata dal vettore $(2,1)$. L'ottimo è quindi localizzato nel punto A di coordinate $x_1^* = 2$, $x_2^* = 3$.

Si noti il percorso seguito sulla frontiera di S_a dalle iterazioni del simplesso, attraverso i vertici $(0,0) \to (3,0) \to (2,3) \equiv A$.

2. Trasformando (6)–(10) in forma standard, si introducono due variabili di slack x_3, x_5 associate rispettivamente ai vincoli (7) e (9) e una variabile di surplus x_4 associata al vincolo (8). Si ottiene dunque quanto segue.

$$(6') \qquad \max\ 3x_1 - x_2$$

soggetto a

$$
\begin{array}{lrl}
(7') & x_1 - x_2 + x_3 & = 1 \\
(8') & -x_1 + 2x_2 \quad - x_4 & = 1 \\
(9') & -2x_1 + x_2 \qquad + x_5 & = 0 \\
(10') & x_1, \ldots, x_5 & \geq 0
\end{array}
$$

A differenza di quanto osservato nell'esercizio 1, le variabili supplementari x_3, x_4, x_5 *non formano una base ammissibile* (la soluzione corrispondente avrebbe $x_4 = -1$). È quindi conveniente impostare il problema di prima fase. In questo caso è sufficiente aggiungere una singola variabile artificiale s_1, in corrispondenza del secondo vincolo.

$$\max\ -s_1$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad &= 1\\
-x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 \qquad + s_1 &= 1\\
-2x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 \qquad &= 0\\
x_1, \dots, x_5, s_1 &\geq 0
\end{aligned}$$

Ora la base $B_0 = \{x_3, s_1, x_5\}$ è ammissibile per il problema di prima fase, e si può avviare l'algoritmo del simplesso.

$$\begin{array}{rl}
\max \;\; z = & -1 \;\; -x_1 \; +2x_2 \; -x_4 \\
x_3 = & \;\;1 \;\; -x_1 \;\; +x_2 \\
s_1 = & \;\;1 \;\; +x_1 \; -2x_2 \; +x_4 \qquad B_0 = \{x_3, s_1, x_5\} \\
x_5 = & \;\;0 \; +2x_1 \; -\mathbf{1}x_2 \\
& x_1, \dots, x_5, s_1 \geq 0
\end{array}$$

A questo punto entra in base la variabile x_2 ($\gamma_2 > 0$) e la regola dei rapporti individua in x_5 la variabile uscente.

$$\begin{array}{rl}
\max \;\; z = & -1 \; +3x_1 \; -2x_5 \; -x_4 \\
x_3 = & \;\;1 \;\; +x_1 \;\; -x_5 \\
s_1 = & \;\;1 \; -\mathbf{3}x_1 \; +2x_5 \; +x_4 \qquad B_1 = \{x_3, s_1, x_2\} \\
x_2 = & \;\;0 \; +2x_1 \;\; -x_5 \\
& x_1, \dots, x_5, s_1 \geq 0
\end{array}$$

Infine entra in base x_1 mentre esce s_1.

$$\begin{array}{rl}
\max \;\; z = & 0 \;\; -s_1 \\
x_3 = & \frac{4}{3} - \frac{1}{3}s_1 - \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_4 \\
x_1 = & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}s_1 + \frac{2}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_4 \qquad B_2 = \{x_3, x_1, x_5\} \\
x_2 = & \frac{2}{3} - \frac{2}{3}s_1 + \frac{1}{3}x_5 + \frac{2}{3}x_4 \\
& x_1, \dots, x_5, s_1 \geq 0
\end{array}$$

Poiché il problema di prima fase ha una soluzione ottima con funzione obiettivo pari a 0, il programma ($6'$)–($10'$) ha una soluzione ammissibile di base, corrispondente a $x_3 = \frac{4}{3}$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$ ($x_4 = x_5 = 0$ perché fuori base). Riformulando ora la funzione obiettivo ($6'$) rispetto alla base B_2 si ottiene quanto segue.

$$\begin{array}{rl}
\max \;\; z = & \frac{1}{3} + \frac{5}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_4 \\
x_3 = & \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_4 \\
x_1 = & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_4 \qquad B_2 = \{x_3, x_1, x_5\} \\
x_2 = & \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_5 + \frac{2}{3}x_4 \\
& x_1, \dots, x_5 \geq 0
\end{array}$$

Sulla colonna di x_4 si può riconoscere la *condizione di illimitatezza:* $\gamma_4 > 0$, con tutti gli $\alpha_{i4} \geq 0$. Il programma (6)–(10) ha quindi $S_a \neq \emptyset$ ma $S_{\text{ott}} = \emptyset$. Si può osservare che dalla riformulazione è immediato ottenere l'equazione parametrica di un raggio lungo il quale la funzione obiettivo cresce indefinitamente:

$$\begin{aligned}
x_3 &= \frac{4}{3} + \frac{1}{3}x_4 \\
x_1 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_4 \qquad t \geq 0. \\
x_2 &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x_4 \\
x_4 &= t
\end{aligned}$$

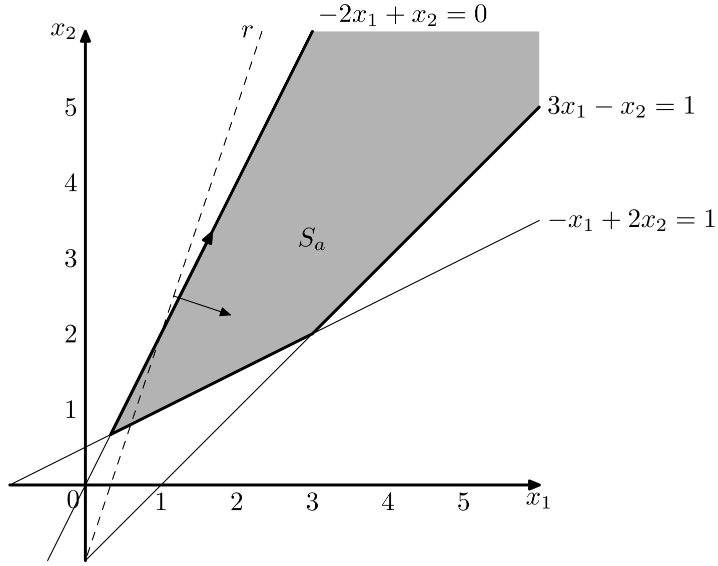

FIGURA 2. Risoluzione per via grafica dell'esercizio 2.

(Nota: corrisponde alla semiretta con origine in ($x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}$) e giacente sulla retta di equazione $-2x_1 + x_2 = 0$.)

(b) Operando graficamente si ottiene la rappresentazione di S_a data in Figura 2. La regione S_a è illimitata (in alto a destra), e la retta isocosto r può essere spostata nella direzione di crescita indefinitamente.

3. La forma standard di (11)–(15) si ottiene introducendo una variabile di slack x_4 e due variabili di surplus x_5, x_6.

(11′) $\quad \max\ 3x_1 - x_2 + x_3$

soggetto a

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
(12') & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & & = 6 \\
(13') & & & x_2 & + & 2x_3 & & & - & x_5 & & = 4 \\
(14') & x_1 & & & - & x_3 & & & & & - x_6 & = 3 \\
(15') & & & & & & & & & & x_1, \dots, x_6 & \geq 0
\end{array}
$$

Non avendo a disposizione una base ammissibile iniziale, è conveniente impostare e risolvere il problema di prima fase utilizzando due variabili artificiali s_1, s_2 introdotte nei vincoli (13′) e (14′) rispettivamente.

$$\max\ -s_1 - s_2$$

soggetto a

$$
\begin{array}{l}
2x_1 + x_2 \qquad + x_4 \qquad\qquad\qquad = 6 \\
\qquad x_2 + 2x_3 \qquad - x_5 \qquad + s_1 \qquad = 4 \\
x_1 \qquad - x_3 \qquad\qquad - x_6 \qquad + s_2 = 3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad x_1, \dots, x_6, s_1, s_2 \geq 0
\end{array}
$$

Si può quindi applicare l'algoritmo del simplesso a partire dalla base iniziale $B_0 = \{x_4, s_1, s_2\}$.

$$
\begin{array}{rrlllllll}
\max & z = & -7 & +x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_5 & -x_6 & \\
& x_4 = & 6 & -2x_1 & -x_2 & & & & \\
& s_1 = & 4 & & -x_2 & -2x_3 & +x_5 & & B_0 = \{x_4, s_1, s_2\} \\
& s_2 = & 3 & -\mathbf{1}x_1 & & +x_3 & & +x_6 & \\
& & \multicolumn{6}{l}{x_1, \dots, x_6, s_1, s_2 \geq 0} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrlllllll}
\max & z = & -4 & -s_2 & +x_2 & +2x_3 & -x_5 & & \\
& x_4 = & 0 & +2s_2 & -x_2 & -\mathbf{2}x_3 & & -2x_6 & \\
& s_1 = & 4 & & -x_2 & -2x_3 & +x_5 & & B_1 = \{x_4, s_1, x_1\} \\
& x_1 = & 3 & -s_2 & & +x_3 & & +x_6 & \\
& & \multicolumn{6}{l}{x_1, \dots, x_6, s_1, s_2 \geq 0} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrllllllll}
\max & z = & -4 & +s_2 & & -x_4 & -x_5 & -2x_6 & \\
& x_3 = & 0 & +s_2 & -\frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_4 & & -x_6 & \\
& s_1 = & 4 & -\mathbf{2}s_2 & & +x_4 & +x_5 & +2x_6 & B_2 = \{x_3, s_1, x_1\} \\
& x_1 = & 3 & & -\frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_4 & & & \\
& & \multicolumn{6}{l}{x_1, \dots, x_6, s_1, s_2 \geq 0} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrllllllll}
\max & z = & -2 & -\frac{1}{2}s_1 & & -\frac{1}{2}x_4 & -\frac{1}{2}x_5 & -x_6 & \\
& x_3 = & 2 & -\frac{1}{2}s_1 & -\frac{1}{2}x_2 & & +\frac{1}{2}x_5 & & \\
& s_2 = & 2 & -\frac{1}{2}s_1 & & +\frac{1}{2}x_4 & +\frac{1}{2}x_5 & +x_6 & B_3 = \{x_3, s_2, x_1\} \\
& x_1 = & 3 & & -\frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_4 & & & \\
& & \multicolumn{6}{l}{x_1, \dots, x_6, s_1, s_2 \geq 0} &
\end{array}
$$

La base B_3 risulta ottima per il problema di prima fase, con $x_3 = 4$, $s_2 = 2$, $x_1 = 3$, e valore di funzione obiettivo $z^* = -2 < 0$. Quindi il programma lineare (11)–(15) *non ha soluzioni ammissibili.*

4. Si perviene alla forma standard di (16)–(20) cambiando segno alla funzione obiettivo e introducendo le variabili di slack x_3, x_4, x_5 rispettivamente nei vincoli (17), (18) e (19).

$$\max\ 2x_1 + 3x_2 \tag{16'}$$

soggetto a

$$
\begin{array}{ll}
(17') & x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\
(18') & x_1 + x_4 = 3 \\
(19') & 2x_2 + x_5 = 3 \\
(20') & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

Partendo dalla base $B_0 = \{x_3, x_4, x_5\}$ si ottiene la riformulazione

$$
\begin{array}{rrllll}
\max & z = & 0 & +2x_1 & +3x_2 & \\
& x_3 = & 4 & -x_1 & -2x_2 & \\
& x_4 = & 3 & -x_1 & & B_0 = \{x_3, x_4, x_5\} \\
& x_5 = & 3 & & -\mathbf{2}x_2 & \\
& & \multicolumn{3}{l}{x_1, \dots, x_5 \geq 0} &
\end{array}
$$

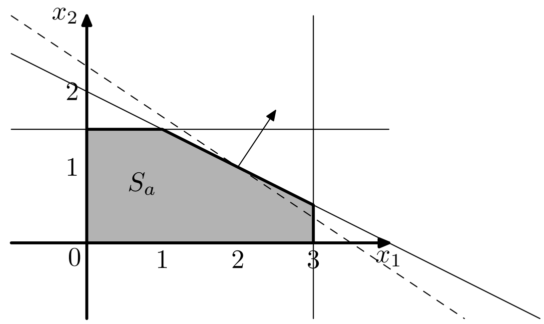

FIGURA 3. Risoluzione per via grafica dell'esercizio 4.

Avendo $\gamma_3, \gamma_2 > 0$ la soluzione ammissibile di base corrispondente non è ottima, e conviene portare in base x_2. La variabile uscente, determinata considerando il rapporto minimo

$$\min\left\{\frac{4}{2}, \frac{3}{2}\right\} = \frac{3}{2},$$

risulta essere la x_5 (l'elemento-cardine è evidenziato in grassetto). Si ottiene quindi

$$\begin{aligned}
\max\ z &= \tfrac{9}{2} + 2x_1 - \tfrac{3}{2}x_5 \\
x_3 &= 1 - \mathbf{1}x_1 + x_5 \\
x_4 &= 3 - x_1 \qquad\qquad B_1 = B_0 \cup \{x_2\} \setminus \{x_5\} \\
x_2 &= \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x_5 \\
& x_1, \ldots, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\max\ z &= \tfrac{13}{2} - 2x_3 + \tfrac{1}{2}x_5 \\
x_1 &= 1 - x_3 + x_5 \\
x_4 &= 2 + x_3 - \mathbf{1}x_5 \qquad\qquad B_2 = B_1 \cup \{x_1\} \setminus \{x_3\} \\
x_2 &= \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x_5 \\
& x_1, \ldots, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

e infine, portando in base la x_5,

$$\begin{aligned}
\max\ z &= \tfrac{15}{2} - \tfrac{3}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}x_4 \\
x_1 &= 3 - x_4 \\
x_5 &= 2 + x_3 - x_4 \qquad\qquad B_3 = B_2 \cup \{x_5\} \setminus \{x_4\} \\
x_2 &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{1}{2}x_4 \\
& x_1, \ldots, x_5 \geq 0.
\end{aligned}$$

La soluzione $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{2}$ risulta quindi ottima per il problema (16)–(20).

La soluzione ottenuta con metodo grafico è illustrata in Figura 3 — la retta isoprofitto tratteggiata è riferita al programma <u>in forma standard</u>; si noti come l'esecuzione del simplesso abbia prodotto la sequenza di vertici $(0,0) \to (0, \frac{3}{2}) \to (1, \frac{3}{2}) \to (3, \frac{1}{2})$.

5. La forma standard di (21)–(24) si ottiene introducendo la variabile di slack x_3 nel vincolo (22), e la variabile di surplus x_4 nel vincolo (23).

$$\max\ 2x_1 - x_2 \tag{21'}$$

soggetto a

$$
\begin{aligned}
(22') &\quad -x_1 + x_2 + x_3 \phantom{{}-x_4} = 1\\
(23') &\quad x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3} - x_4 = 2\\
(24') &\quad x_1, \dots, x_4 \ge 0
\end{aligned}
$$

Dalla forma standard non è immediata la derivazione di una base ammissibile (la base $\{x_3, x_4\}$ non è ammissibile). Si può ricorrere al problema di prima fase per determinare una soluzione ammissibile di base iniziale. È sufficiente una singola variabile artificiale s_1, aggiunta al vincolo $(23')$, per completare la sottomatrice identità nella matrice del sistema.

$$\max\ -s_1$$

soggetto a

$$
\begin{aligned}
-x_1 + x_2 + x_3 \phantom{{}-x_4+s_1} &= 1\\
x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3} - x_4 + s_1 &= 2\\
x_1, \dots, x_4, s_1 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Il problema di prima fase così ottenuto ha una base ammissibile evidente $B_0 = \{x_3, s_1\}$.

$$
\begin{aligned}
\max\ z &= -2 + x_1 + 2x_2 - x_4\\
x_3 &= 1 + x_1 - x_2\\
s_1 &= 2 - x_1 - \mathbf{2}x_2 + x_4\\
&x_1, \dots, x_4, s_1 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\max\ z &= 0 - s_1\\
x_3 &= 0 + \tfrac{3}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}s_1 - \tfrac{1}{2}x_4\\
x_2 &= 1 - \tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{1}{2}s_1 + \tfrac{1}{2}x_4\\
&x_1, \dots, x_4, s_1 \ge 0
\end{aligned}
\qquad B_1 = B_0 \cup \{x_2\} \setminus \{s_1\}
$$

Poiché il problema di prima fase ha un ottimo con valore nullo, segue che la base B_1 è ammissibile per $(21')$–$(24')$. Si procede quindi partendo dalla base B_1, eliminando la variabile artificiale s_1 e riformulando la funzione obiettivo $(21')$ rispetto a B_1:

$$z = 2x_1 - x_2 = 2x_1 - \left(1 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_4\right) = -1 + \frac{5}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_4.$$

$$
\begin{aligned}
\max\ z &= -1 + \tfrac{5}{2}x_1 - \tfrac{1}{2}x_4\\
x_3 &= 0 + \tfrac{3}{2}x_1 - \tfrac{1}{2}x_4\\
x_2 &= 1 - \boldsymbol{\tfrac{1}{2}}x_1 + \tfrac{1}{2}x_4\\
&x_1, \dots, x_4, s_1 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\max\ z &= 4 - 5x_2 + 2x_4\\
x_3 &= 3 - 3x_2 + x_4\\
x_1 &= 2 - 2x_2 + x_4\\
&x_1, \dots, x_4, s_1 \ge 0
\end{aligned}
\qquad B_2 = B_1 \cup \{x_1\} \setminus \{x_2\}
$$

Nell'ultima riformulazione si osserva la condizione di illimitatezza $\gamma_4 > 0$, $\alpha_{34}, \alpha_{14} \ge 0$. Risulta quindi $S_a \ne \emptyset$, $S_{\text{ott}} = \emptyset$. La funzione obiettivo cresce illimitatamente lungo la semiretta

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 + t \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 3 + t \\ x_4 &= t \end{aligned} \qquad t \geq 0.$$