COMPITO DI RICERCA OPERATIVA
APPELLO DEL 08/01/04

Esercizio 1
Si risolva *con il metodo branch-and-bound* il seguente problema di PLI

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 + 2x_2 \\ & -4x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 7 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \in I. \end{aligned}$$

sapendo che la base ottima del rilassamento lineare del nodo radice è $B^* = \{x_2, x_1\}$, alla quale corrisponde la riformulazione

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{7}{2} - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_3 \\ & x_2 = 2 - \frac{2}{7}x_4 - \frac{1}{7}x_3 \\ & x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{14}x_4 + \frac{3}{14}x_3 \\ & x_1, \ldots, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

(13 punti)

Esercizio 2
Sia dato il seguente problema di PL

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ & -x_1 - 4x_2 - 6x_3 + x_4 = -1 \\ & -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_5 = -1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

1) Si trovi il duale di tale problema. (2 punti)
2) Si risolva graficamente il duale (NB: per la risoluzione grafica si trasformi il problema duale di minimo in un problema di massimo) (4 punti)
3) Si determini *usando le condizioni di complementaritá* la soluzione ottima del primale. (4 punti)
4) Dal risultato del punto 3) si individui la base ottima del problema e si stabilisca *guardando soltanto il duale e la sua risoluzione grafica* in quale intervallo si puó far variare la modifica Δc_3 del coefficiente della variabile x_3 nell'obiettivo senza che cambi la base ottima. (3 punti)

Esercizio 3
Sia dato il seguente grafo non orientato rappresentato tramite le seguenti liste di adiacenza

$$a \ : \ (b,d) \quad b \ : \ (a,c) \quad c \ : \ (b,d,f) \quad d \ : \ (a,c,e)$$
$$e \ : \ (d,g) \quad f \ : \ (c,g) \quad g \ : \ (e,f)$$

Si stabilisca se il grafo é connesso e se é bipartito. (4 punti)

Esercizio 4
Un'azienda deve pianificare le spedizioni dei propri prodotti dai suoi tre magazzini M_1, M_2, M_3 che dispongono rispettivamente di 100, 250 e 200 unità di prodotto rispettivamente, a quattro punti vendita V_1, V_2, V_3, V_4 che richiedono forniture di

almeno 90, 120, 150 e 100 unità rispettivamente. I costi di trasporto per ogni unità di prodotto su ogni singola tratta $M_i \to V_j$ sono dati dalla seguente matrice

$$c_{ij} = \begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 3 \\ 4 & 9 & 8 & 10 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Detto x_{ij} il numero di unità di prodotto spedita sulla tratta $M_i \to V_j$, il modello per pianificare le spedizioni a costo minimo è

$$\min \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
&x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 100 \\
&x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 250 \\
&x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 200 \\
&x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 90 \\
&x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 120 \\
&x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 150 \\
&x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 100 \\
&x_{ij} \geq 0, \ \forall i, j.
\end{aligned}$$

Aggiungere al modello le variabili e i vincoli necessari per incorporare i seguenti requisiti supplementari (separatamente).

(1) Il magazzino M_1 rifornisce al più tre punti vendita.
(2) Almeno uno dei tre magazzini deve rimanere con almeno il 20% della sua disponibilità non spedita.

(4 punti)

Soluzioni

1. L'albero di branch è riportato in Figura 1. Inizialmente si assume LB $= -\infty$.

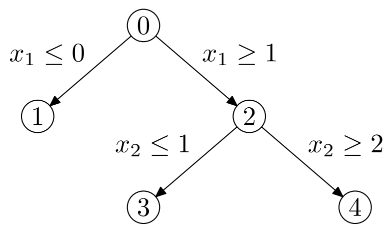


Figura 1. Albero di branch per l'esercizio 1.

Dalla riformulazione data corrispondente al rilassamento lineare del nodo radice 0

$$\begin{array}{rrrrr} \max & z = & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2}x_4 & -\frac{1}{2}x_3 \\ & x_2 = & 2 & -\frac{2}{7}x_4 & -\frac{1}{7}x_3 \\ & x_1 = & \frac{1}{2} & -\frac{1}{14}x_4 & +\frac{3}{14}x_3 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, \ldots, x_4 \geq 0,} \end{array} \qquad \text{(Nodo 0)}$$

occorre generare i nodi 1 e 2 effettuando l'operazione di branch sulla variabile x_1. Si generano quindi

$$x_1 \leq 0 \qquad \Longleftrightarrow -\frac{1}{14}x_4 + \frac{3}{14}x_3 + y_1 = -\frac{1}{2}, \qquad \text{(Nodo 1)}$$

$$x_1 \geq 1 \qquad \Longleftrightarrow -\frac{1}{14}x_4 + \frac{3}{14}x_3 - y_2 = \frac{1}{2}. \qquad \text{(Nodo 2)}$$

Al nodo 1 si ottiene

$$\begin{array}{rrrrr} \max & z = & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2}x_4 & -\frac{1}{2}x_3 \\ & x_2 = & 2 & -\frac{2}{7}x_4 & -\frac{1}{7}x_3 \\ & x_1 = & \frac{1}{2} & -\frac{1}{14}x_4 & +\frac{3}{14}x_3 \\ & y_1 = & -\frac{1}{2} & +\mathbf{\frac{1}{14}}x_4 & -\frac{3}{14}x_3 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, \ldots, x_4 \geq 0,} \end{array}$$

e quindi

$$\begin{array}{rrrrr} \max & z = & 0 & -7y_1 & -2x_3 \\ & x_2 = & 0 & -4y_1 & -x_3 \\ & x_1 = & 0 & -y_1 & \\ & x_4 = & 7 & +14y_1 & +3x_3 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, \ldots, x_4, y_1 \geq 0.} \end{array} \qquad \Longrightarrow \text{LB} = 0 \text{ (soluzione intera).}$$

$$\text{(Nodo 1)}$$

Il nodo 1 viene chiuso per ottimalità.
Al nodo 2 risulta

$$\begin{array}{rrrrr} \max & z = & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2}x_4 & -\frac{1}{2}x_3 \\ & x_2 = & 2 & -\frac{2}{7}x_4 & -\frac{1}{7}x_3 \\ & x_1 = & \frac{1}{2} & -\frac{1}{14}x_4 & +\frac{3}{14}x_3 \\ & y_2 = & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{14}x_4 & +\mathbf{\frac{3}{14}}x_3 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, \ldots, x_4, y_2 \geq 0,} \end{array}$$

e quindi

$$\begin{array}{rrlll}
\max & z = & \frac{7}{3} & -\frac{2}{3}x_4 & -\frac{7}{3}y_2 \\
& x_2 = & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3}x_4 & -\frac{2}{3}y_2 \\
& x_1 = & 1 & & +y_2 \\
& x_3 = & \frac{7}{3} & +\frac{1}{3}x_4 & +\frac{14}{3}y_2 \\
& & \multicolumn{3}{l}{x_1, \ldots, x_4, y_2 \geq 0}
\end{array} \qquad \text{(Nodo 2)}$$

Poiché $\mathrm{UB}_2 = \frac{7}{3} > \mathrm{LB}$, il nodo 2 rimane aperto, e si prosegue da qui effettuando un branch sulla variabile x_2 che ha valore frazionario. Si generano quindi i nodi 3 e 4.

$$x_2 \leq 1 \qquad \iff -\frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}y_2 + y_3 = -\frac{2}{3}, \qquad \text{(Nodo 3)}$$

$$x_2 \geq 2 \qquad \iff -\frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}y_2 - y_4 = \frac{1}{3}. \qquad \text{(Nodo 4)}$$

Al nodo 3 risulta

$$\begin{array}{rrlll}
\max & z = & \frac{7}{3} & -\frac{2}{3}x_4 & -\frac{7}{3}y_2 \\
& x_2 = & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3}x_4 & -\frac{2}{3}y_2 \\
& x_1 = & 1 & & +y_2 \\
& x_3 = & \frac{7}{3} & +\frac{1}{3}x_4 & +\frac{14}{3}y_2 \\
& y_3 = & -\frac{2}{3} & +\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}x_4 & +\frac{2}{3}y_2 \\
& & \multicolumn{3}{l}{x_1, \ldots, x_4, y_2 \geq 0,}
\end{array}$$

e quindi

$$\begin{array}{rrlll}
\max & z = & 1 & -2y_3 & -y_2 \\
& x_2 = & 1 & -y_3 & \\
& x_1 = & 1 & & +y_2 \\
& x_3 = & 3 & +y_3 & +4y_2 \\
& x_4 = & 2 & +3y_3 & -2y_2 \\
& & \multicolumn{3}{l}{x_1, \ldots, x_2, y_2, y_3 \geq 0}
\end{array} \qquad \Longrightarrow \text{LB} = 1, \text{ nuova miglior soluzione.}$$

(Nodo 3)

Il nodo 3 viene chiuso per ottimalità. Al nodo 4 si verifica immediatamente che il vincolo generato dal branch causa non ammissibilità, quindi anche questo nodo viene chiuso.
Non ci sono altri nodi aperti; la soluzione ottima cercata è quindi

$$x_1^* = 1, \; x_2^* = 1, \; x_3^* = 3, \; x_4^* = 2,$$

trovata al nodo 3.

2.1. Il duale del problema dato è

$$\min \; -u_1 - u_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
&-u_1 - 2u_2 \geq -1 \\
&-4u_1 - 2u_2 \geq -2 \\
&-6u_1 - 3u_2 \geq -4 \\
&u_1 \geq 0 \\
&u_2 \geq 0
\end{aligned}$$

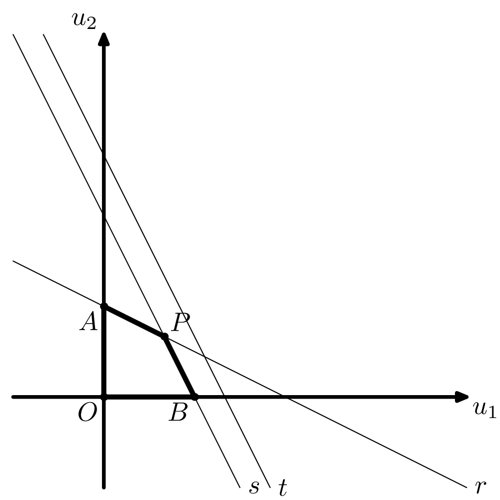
2.2. È più agevole riscrivere il problema come

$$-\max \; u_1 + u_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
&u_1 + 2u_2 \le 1\\
&4u_1 + 2u_2 \le 2\\
&6u_1 + 3u_2 \le 4\\
&u_1 \ge 0\\
&u_2 \ge 0
\end{aligned}$$

La regione di ammissibilità è riportata in Figura 2. L'ottimo del problema si trova nel punto $P(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, con valore $z^* = -u_1^* - u_2^* = -\frac{2}{3}$.



$r : u_1 + 2u_2 = 1$

$s : 4u_1 + 2u_2 = 2$

$t : 6u_1 + 3u_2 = 4$

$A\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$

$B\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$

$P\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$

Figura 2. Regione di ammissibilità per l'esercizio 2.

2.3. All'ottimo $u_1^* = \frac{1}{3}$, $u_2^* = \frac{1}{3}$ gli ultimi tre vincoli, associati alle variabili primali x_3, x_4, x_5, sono soddisfatti come disuguaglianze strette. Questo implica che si deve avere all'ottimo primale

$$x_3^* = x_4^* = x_5^* = 0.$$

Quindi la soluzione ottima del primale è data da

$$\begin{aligned}
-x_1^* - 4x_2^* &= -1\\
-2x_1^* - 2x_2^* &= -1
\end{aligned} \qquad \Longrightarrow \; x_1^* = \frac{1}{3}, x_2^* = \frac{1}{6};$$

si noti che la funzione obiettivo nel punto $x_1^* = \frac{1}{3}$, $x_2^* = \frac{1}{6}$, $x_3^* = x_4^* = x_5^* = 0$ risulta $z^* = -\frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{2}{3}$, concorde con la soluzione ottima duale già calcolata.

2.4. La variazione Δc_3 nel primale impatta solo sul termine noto del terzo vincolo del duale (e quindi impatta solo sull'ammissibilità duale). La soluzione ottima duale $u_1^* = u_2^* = \frac{1}{3}$ rimane ammissibile — e di conseguenza la base primale rimane ottima — fino a quando

$$-6u_1^* - 3u_2^* \ge -4 + \Delta c_3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Delta c_3 \le 1.$$

Sul grafico, questo equivale a spostare la retta t verso la s alla quale essa è parallela. Quando t scende al di sotto di s ($\Delta c_3 > 1$) allora è il secondo vincolo ad essere soddisfatto come disuguaglianza stretta, quindi per l'ottimo primale si richiede $x_2^* = 0$ e la base ottima primale inevitabilmente cambia.

3. Il grafo risulta connesso e non bipartito. Applicando l'algoritmo per verificare se il grafo è connesso, si evolve come segue.

S	T_1	j
$\{a\}$	$\emptyset$	a
$\{b,d\}$	$\{a\}$	b
$\{d,c\}$	$\{a,b\}$	d
$\{c,e\}$	$\{a,b,d\}$	c
$\{e,f\}$	$\{a,b,d,c\}$	e
$\{f,g\}$	$\{a,b,d,c,e\}$	f
$\{g\}$	$\{a,b,d,c,e,f\}$	g
$\emptyset$	$\{a,b,d,c,e,f,g\}$	$-$

L'algoritmo per la bipartizione individua un ciclo di lunghezza dispari (dettagli omessi).

4.1. Occorre introdurre quattro variabili 0/1

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \in \{0,1\}$$

con il seguente significato:

$$y_j = 1 \text{ se } M_1 \text{ rifornisce } V_j, \text{ 0 altrimenti.}$$

Quindi occorre creare un vincolo che rappresenti la condizione "non più di tre punti riforniti da M_1" in funzione di queste variabili, ed una serie di vincoli che impongano le condizioni

$$x_{1j} = 0 \text{ se } y_j = 0.$$

La condizione logica è modellata da

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 3,$$

mentre la correazione tra le x e le y è garantita dalla serie di vincoli

$$x_{11} \leq My_1, \qquad x_{12} \leq My_2,$$
$$x_{13} \leq My_3, \qquad x_{14} \leq My_4,$$

dove M è una costante sufficientemente elevata (qui $M = 100$ è sufficiente).

4.2. Di nuovo, occorrono una serie di variabili 0/1, un vincolo logico ed una serie di vincoli in grado di correlare i valori assunti dalle variabili 0/1 alle altre variabili. Si definiscono quindi le

$$y_1, y_2, y_3 \in \{0,1\}$$

dove $y_i = 1$ se M_i *non* smista almeno il 20% della disponibilità, 0 altrimenti. Si scrivono quindi i vincoli

$$y_1 + y_2 + y_3 \geq 1$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{1j} \leq 0.8 \cdot 100y_1 + 100(1 - y_1)$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{2j} \leq 0.8 \cdot 250y_2 + 250(1 - y_2)$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{3j} \leq 0.8 \cdot 200y_3 + 200(1 - y_3)$$

(notare come si comporta il secondo membro dei tre vincoli se $y_i = 1$ e se $y_i = 0$). Con gli ultimi tre vincoli scritti in questo modo, i primi tre del modello originale diventano ridondanti.