Esercizio 1

1) Sia dato il seguente problema di PL:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 3x_2 + x_3 \\ & x_2 + x_3 = 2 \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

risolverlo con l'algoritmo del simplesso. (8 punti)

2) Stabilire se la soluzione ottima del problema é unica oppure no (MOTIVARE LA RISPOSTA) (1 punto)

3) Si individui l'inversa della matrice di base ottima (2 punti)

4) In quale intervallo posso far variare la modifica Δc_3 del coefficiente di x_3 nell'obiettivo senza che cambi la base ottima? Ed in quale intervallo posso far variare la modifica Δb_1 del termine noto del primo vincolo senza che cambi la base ottima? (5 punti)

5) Si scriva il duale del problema di PL (1 punto)

6) Determinare, *usando le condizioni di complementaritá*, una soluzione ottima del duale (4 punti)

7) Si supponga di introdurre il vincolo di interezza sulle variabili del problema di PL. Si risolva il problema di PLI ottenuto in questo modo *con l'algoritmo di taglio di Gomory* (4 punti)

Esercizio 2

Sia dato il grafo orientato descritto dalle seguenti liste di adiacenza:

$$a: \{b, c\} \quad b: \{f\} \quad c: \{e\} \quad d: \emptyset \quad e: \{b, g\} \quad f: \{c\} \quad g: \{a, d\}$$

Si determini con l'algoritmo visto a lezione se il grafo è bipartito oppure no (3 punti)

Esercizio 3

(1) Sia dato il seguente problema di PL:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Si può verificare che tale problema ammette soluzione ottima. Si supponga di aggiungere una variabile x_5 con coefficiente nell'obiettivo pari a c_5 e nei vincoli rispettivamente a_{15} e a_{25}, cioè si consideri il problema di PL:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + c_5x_5 \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 + a_{15}x_5 = 5 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_4 + a_{25}x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Perchè questo problema ha regione ammissibile non vuota per ogni possibile scelta di c_5, a_{15}, a_{25}? Sapreste scegliere c_5, a_{15}, a_{25} in modo tale che il problema abbia obiettivo illimitato (SUGGERIMENTO: si ragioni sul duale del problema)? (3 punti)

(2) Dati due compiti 1 e 2, si associ a ciascuno di questi una variabile binaria ($i = 1, 2$):

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{se decido di NON svolgere il compito } i \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Come esprimereste tramite una disequazione la condizione logica "se decido di non svolgere il compito 2, allora decido anche di non svolgere il compito 1"? (MOTIVARE LA RISPOSTA) (3 punti)

Soluzioni

1. (1) $B_1 = \{x_3, x_4\}$ è già una base ammissibile; è sufficiente riformulare la funzione obiettivo. Si ottiene quindi

$$\begin{array}{rrrrl}
\max & z = & 2 & +3x_1 & +2x_2 \\
& x_3 = & 2 & & -x_2 \\
& x_4 = & 5 & \mathbf{-2}x_1 & -x_2 \\
& & \multicolumn{3}{l}{x_1, \ldots, x_4 \geq 0}
\end{array} \implies B_2 = B_1 - \{x_4\} \cup \{x_1\}\,;$$

$$\begin{array}{rrrrl}
\max & z = & \frac{19}{2} & -\frac{3}{2}x_4 & +\frac{1}{2}x_2 \\
& x_3 = & 2 & & \mathbf{-1}x_2 \\
& x_1 = & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2}x_4 & -\frac{1}{2}x_2 \\
& & \multicolumn{3}{l}{x_1, \ldots, x_4 \geq 0}
\end{array} \implies B_3 = B_2 - \{x_3\} \cup \{x_1\}\,;$$

$$\begin{array}{rrrrl}
\max & z = & \frac{21}{2} & -\frac{3}{2}x_4 & -\frac{1}{2}x_3 \\
& x_2 = & 2 & & -x_3 \\
& x_1 = & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}x_4 & +\frac{1}{2}x_3 \\
& & \multicolumn{3}{l}{x_1, \ldots, x_4 \geq 0}
\end{array} \text{(ottimo).}$$

(2) La soluzione ottima è unica, in quanto $\gamma_3, \gamma_4 > 0$.

(3) Leggendo le colonne dove si trovava la base iniziale e cambiando i segni risulta

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Come prova si può calcolare

$$A_B^{-1} A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) Poiché x_3 non è nella base ottima, risulta

$$-\infty \leq \Delta c_3 \leq \frac{1}{2} \qquad \left(\frac{1}{2} = -\gamma_3\right).$$

Per quanto riguarda Δb_1, imponendo le condizioni di ammissibilità $A_B^{-1}(b+\Delta b) \geq 0$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta b_1 \\ 0 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

cioè

$$\begin{array}{r} \Delta b_1 \geq -2 \\ -\dfrac{1}{2}\Delta b_1 \geq -\dfrac{3}{2} \end{array} \implies -2 \leq \Delta b_1 \leq 3.$$

(5) Il duale del PL in esame è

$$\begin{array}{llll}
\min & 2u_1 & +5u_2 & \\
& & 2u_2 & \geq 3 \\
& u_1 & +u_2 & \geq 3 \\
& u_1 \geq 1 & & \\
& u_2 \geq 0 & &
\end{array}$$

(6) Poiché nella soluzione ottima del primale si ha $x_1^*, x_2^* > 0$, i primi due vincoli devono essere soddisfatti, all'ottimo duale, come uguaglianze strette:

$$\begin{array}{r} 2u_2^* = 3 \\ u_1^* + u_2^* = 3 \end{array} \implies u_1^* = u_2^* = \frac{3}{2}.$$

Si noti che $2u_1^* + 5u_2^* = \frac{21}{2}$, coincidente con il valore dell'ottimo primale, come previsto dalla teoria.

(7) Calcolando il taglio sulla riga di x_1 si ottiene il vincolo supplementare

$$\frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_3 \geq \frac{1}{2} \implies \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_3 - y = \frac{1}{2},$$

quindi

$$\begin{array}{rrrrr}
\max & z = & \frac{21}{2} & -\frac{3}{2}x_4 & -\frac{1}{2}x_3 \\
 & x_2 = & 2 & & -x_3 \\
 & x_1 = & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}x_4 & +\frac{1}{2}x_3 \\
 & y = & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2}x_4 & +\frac{1}{2}x_3 \\
 & & \multicolumn{3}{c}{x_1, \dots, x_4, y \geq 0,}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrr}
\max & z = & 10 & -x_4 & -y \\
 & x_2 = & 1 & +x_4 & -2y \\
 & x_1 = & 2 & -x_4 & +y \\
 & x_3 = & 1 & -x_4 & +2y \\
 & & \multicolumn{3}{c}{x_1, \dots, x_4, y \geq 0}
\end{array}
\qquad \text{(ottimo intero).}$$

2. Il grafo è bipartito.

3. Dato il problema

$$\begin{array}{lrrrrl}
\max & x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & \\
 & x_1 & +3x_2 & +x_3 & & = 5 \\
 & 2x_1 & +5x_2 & & +x_4 & = 3 \\
\multicolumn{6}{l}{x_1, \dots, x_4 \geq 0,}
\end{array}$$

sia $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_4)$ una soluzione ammissibile. Allora la soluzione $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_4, 0)$ è ammissibile per

$$\begin{array}{lrrrrrl}
\max & x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & +c_5 & \\
 & x_1 & +3x_2 & +x_3 & & +a_{15}x_5 & = 5 \\
 & 2x_1 & +5x_2 & & +x_4 & +a_{25}x_5 & = 3 \\
\multicolumn{7}{l}{x_1, \dots, x_4, x_5 \geq 0,}
\end{array}$$

per qualunque scelta di a_{15}, a_{25} (c_5 è, a maggior ragione, ininfluente sull'ammissibilità). Il duale di quest'ultimo programma è

$$\begin{array}{lrrl}
\min & 5u_1 & +3u_2 & \\
 & u_1 & +2u_2 & \geq 1 \\
 & 3u_1 & 5u_2 & \geq 2 \\
 & u_1 & & \geq 3 \\
 & & u_2 & \geq 1 \\
 & a_{15}u_1 & +a_{25}u_2 & \geq c_5
\end{array}$$

e può essere reso privo di soluzioni ammissibili scegliendo, ad esempio, $a_{15}, a_{25} < 0$, $c_5 > 0$; poiché si è già stabilito che il primale ha sicuramente soluzioni ammissibli, esso deve essere allora illimitato, per i teoremi noti sulla dualità.