

- Il gioco delle torri di Hanoi è costituito da tre pioli verticali (sinistro, centrale, destro), e da un certo numero di dischi forati, di diametri tutti diversi fra di loro, che si possono infilare nei pioli.
- All'inizio del gioco tutti i dischi sono infilati su un piolo, ad esempio il sinistro, in ordine decrescente di diametro dalla base verso la cima del piolo.
- Lo scopo del gioco è quello di spostare tutti i dischi su un altro piolo (ad es. sul destro), eventualmente utilizzando il piolo rimanente (ad es. il centrale), senza mai violare la seguente regola:
 - si può spostare da un piolo ad un altro un solo disco per volta, cioè quello più in alto nel piolo di partenza;
 - non si può posare un disco sopra un altro disco di diametro inferiore.

Problema

<http://www.cut-the-knot.org/recurrence/hanoi.shtml>

Il gioco è risolubile per qualunque numero n di dischi?

Se lo è, qual è per ogni n la sequenza minima di mosse che lo risolve?

Premessa (ovvia)

Lo spostamento di un disco singolo da un piolo ad un altro, se è possibile secondo le regole del gioco (cioè se non ha dischi sopra di sé, e se viene spostato sopra un disco più grande di sé), non richiede l'uso di un piolo ausiliario.

Teorema:

Il gioco è risolubile per qualsiasi numero n di dischi.

La dimostrazione è per induzione su n .

Dimostrazione.

Base dell'induzione: Il gioco è risolubile per $n = 1$.

Dimostrazione: Ovvio, perché una torre di altezza 1, cioè un solo disco, può essere spostata con una sola mossa da un piolo ad un altro (senza bisogno di piolo ausiliario).

Passo di Induzione:

Ipotesi (induttiva):

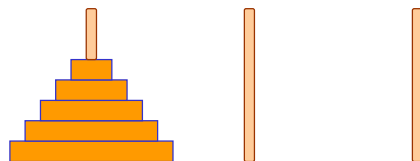
Il problema di spostare una torre di altezza $k-1$ da un qualunque piolo ad un qualunque altro piolo con l'ausilio di un piolo ausiliario è risolubile.

Tesi:

Il problema di spostare una torre di altezza k da un piolo (qualunque) **orig** ad un altro piolo **dest** con l'ausilio di un terzo piolo **aus** è risolubile.

Dimostrazione (continua).

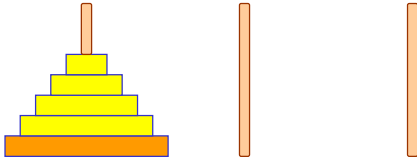
Dimostrazione del Passo:



Dimostrazione (continua).

Dimostrazione del Passo:

- si spostano i $k-1$ dischi superiori



29/10/2005

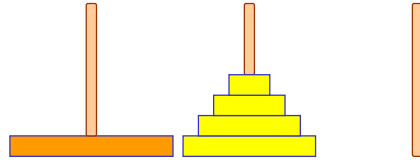
AlgELab-05-06 - Lez.06

7

Dimostrazione (continua).

Dimostrazione del Passo:

- si spostano i $k-1$ dischi superiori dal piolo **orig** al piolo **aus** con l'ausilio di **dest** (è possibile per ipotesi induttiva);



29/10/2005

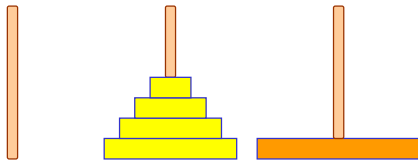
AlgELab-05-06 - Lez.06

8

Dimostrazione (continua).

Dimostrazione del Passo:

- si spostano i $k-1$ dischi superiori dal piolo **orig** al piolo **aus** con l'ausilio di **dest** (è possibile per ipotesi induttiva);
- si sposta il restante disco grande da **orig** a **dest**;



29/10/2005

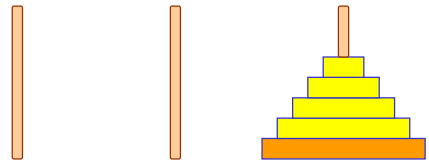
AlgELab-05-06 - Lez.06

9

Dimostrazione (continua).

Dimostrazione del Passo:

- si spostano i $k-1$ dischi superiori dal piolo **orig** al piolo **aus** con l'ausilio di **dest** (è possibile per ipotesi induttiva);
- si sposta il restante disco grande da **orig** a **dest**;
- si spostano i $k-1$ dischi dal piolo **aus** al piolo **dest** con l'ausilio di **orig** (è possibile per ipotesi induttiva).



29/10/2005

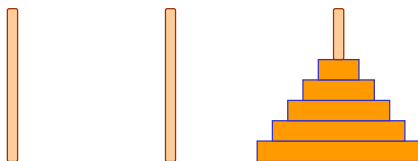
AlgELab-05-06 - Lez.06

10

Dimostrazione (continua).

Dimostrazione del Passo:

- si spostano i $k-1$ dischi superiori dal piolo **orig** al piolo **aus** con l'ausilio di **dest** (è possibile per ipotesi induttiva);
- si sposta il restante disco grande da **orig** a **dest**;
- si spostano i $k-1$ dischi dal piolo **aus** al piolo **dest** con l'ausilio di **orig** (è possibile per ipotesi induttiva).



29/10/2005

AlgELab-05-06 - Lez.06

11

La procedura ricorsiva (schema di base)

```
class Hanoi {
    enum Piolo { SINISTRO, CENTRALE, DESTRO }
    ...
    static void hanoi(int n, Piolo orig, Piolo aus, Piolo dest) {
        if (n == 1) spostaILDisco(orig, dest);
        else {
            hanoi(n-1, orig, dest, aus);
            spostaILDisco(orig, dest);
            hanoi(n-1, aus, orig, dest);
        }
    }
}

public static void main(String[] args) {
    hanoi(10, Piolo.SINISTRO, Piolo.CENTRALE, Piolo.DESTRO);
}
```

29/10/2005

AlgELab-05-06 - Lez.06

12

Analisi della complessità: equazioni di ricorrenza

Il tempo di calcolo è evidentemente proporzionale al numero delle istruzioni di spostamento di disco, cioè al numero di mosse necessarie per risolvere il gioco.

Per risolvere il gioco per $n = 1$ occorre una mossa: $T(1) = 1$

Per risolvere il gioco per $n > 1$ occorrono:

$T(n-1)$ mosse per spostare gli $n-1$ dischi da **orig** a **aus**;

1 mossa per spostare il disco da **orig** a **dest**;

$T(n-1)$ mosse per ri-spostare gli $n-1$ dischi da **aus** a **dest**;

Le equazioni di ricorrenza sono allora:

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 2T(n-1) + 1$$

29/10/2005

AlgELab-05-06 - Lez.06

13

Risoluzione delle equazioni di ricorrenza

$$T(n) = 2T(n-1) + 1$$

$$T(n) = 2T(n-1) + 1 =$$

$$T(n-1) = 2T((n-1)-1) + 1 = 2T(n-2) + 1$$

$$= 2(2T(n-2) + 1) + 1 =$$

$$= 2^2T(n-2) + 2 + 1 =$$

$$T(n-2) = 2T((n-2)-1) + 1 = 2T(n-3) + 1$$

$$= 2^2(2T(n-3) + 1) + 2 + 1 =$$

$$= 2^3T(n-3) + 2^2 + 2 + 1 =$$

...

$$= 2^kT(n-k) + 2^{k-1} + 2 + 1 =$$

per $n-k = 1$, cioè $k = n-1$:

$$T(n) = 2^{n-1}T(1) + \dots + 2^2 + 2 + 1 = 2^n - 1$$

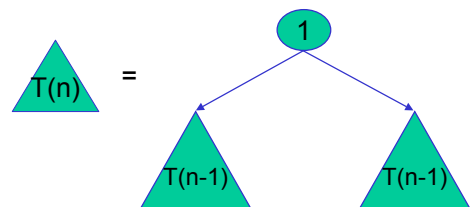
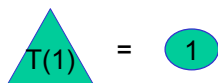
$$T(n) = 2^n - 1$$

29/10/2005

AlgELab-05-06 - Lez.06

14

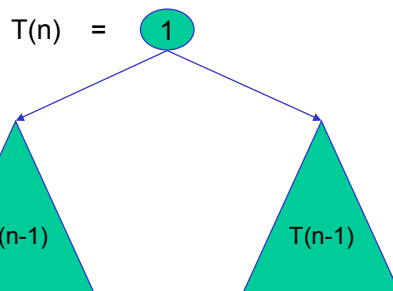
Rappresentazione grafica delle eq. di ricorrenza (albero di ricorsione)



29/10/2005

AlgELab-05-06 - Lez.06

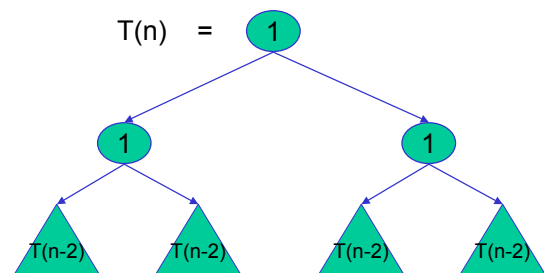
15



29/10/2005

AlgELab-05-06 - Lez.06

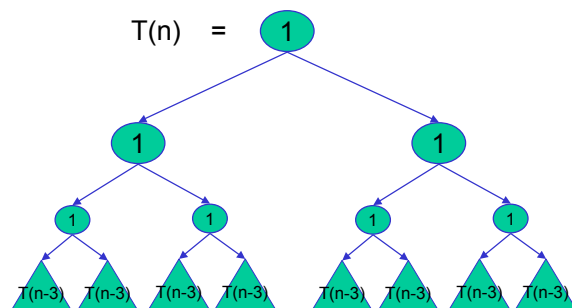
16



29/10/2005

AlgELab-05-06 - Lez.06

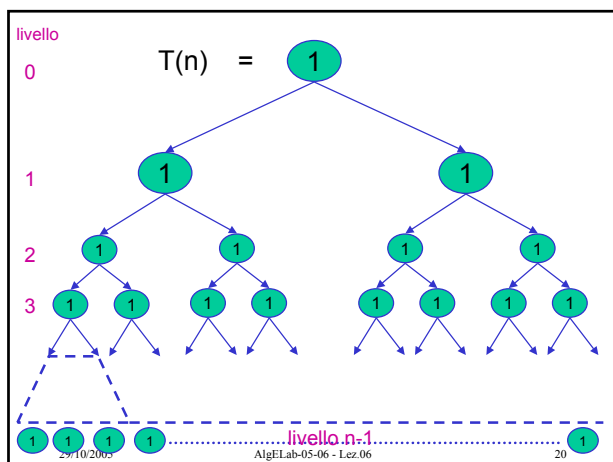
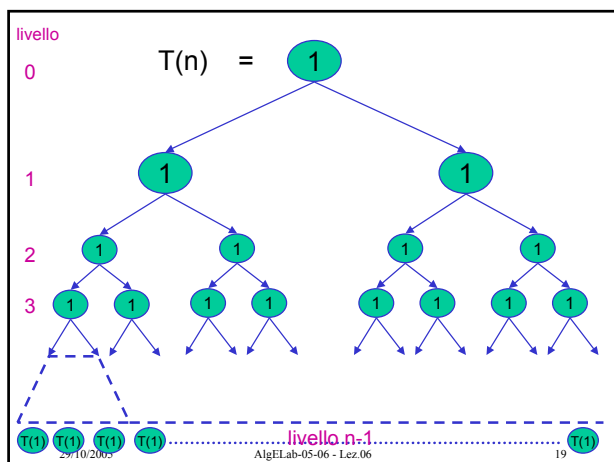
17



29/10/2005

AlgELab-05-06 - Lez.06

18



Ogni nodo vale 1, quindi il tempo totale è il numero dei nodi dell'albero di ricorsione.

L'albero è un albero completo a n livelli, da 0 a $n-1$;

il numero dei nodi è quindi $2^n - 1$.

La complessità in spazio è data dall'altezza dell'albero di ricorsione, che rappresenta la massima profondità dello stack.

Abbiamo quindi:

$$T(n) = \Theta(2^n) \quad S(n) = \Theta(n)$$

Il gioco delle Torri di Hanoi è intrattabile, poiché il numero di mosse costituenti la soluzione cresce esponenzialmente al crescere del numero dei dischi. È del tutto ovvio che l'algoritmo descritto è l'unico possibile (eccetto banali varianti, quali quella ottenuta eliminando la ricorsione di coda, che vedremo).