UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA

Trg Dositeja Obradovića 6
21000 Novi Sad, Srbija i Crna Gora

MAGISTARSKI RAD

Metod redukcije u lambda računu sa tipovima sa presekom

Silvia Likavec

MENTOR:
Prof. dr. Silvia Gilezan

Novi Sad, 2005

Zahvalnica

Pre svega, želim da se zahvalim Silvii Gilezan, koja je uspela da u isto vreme bude sjajan mentor i veliki prijatelj. Bez njene bezrezervne podrške, ovaj ceo put bi bio potpuno drugačiji, mnogo teži i manje zanimljiv. Ona mi je otkrila jedan potpuno novi svet matematike, logike i računarstva, ohrabrila me da izaberem novi istraživački put i ponovo u sebi pronadjem matematičara.

Takodje sam zahvalna profesorima Siniši Crvenkoviću i Jovanki Pantović, na interesovanju koje su pokazali za moj rad.

Iznad svega, hoću da se zahvalim mami, tati i Danki za njihovu ljubav, beskonačno poverenje i strpljenje. Zatim Srdjanu, Danieli, Dudi, Gagi, Goci, Ivani, Jovani, Liviji, Mimi, Tanji i Zoranu i ostalim prijateljima i porodici što su bili tu kada su mi bili potrebni.

Mojim kolegama sa Instituta za Matematiku i fiziku u tenhici, Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu dugujem zahvalnost za kreativnu i prijateljsku atmosferu u kojoj je pravo zadovoljstvo raditi.

A sve ovo je samo početak.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
KLJUČNE DOKUMENTACIJSKE INFORMACIJE

Tip dokumentacije: TD	Monografski rad
Tip zapisa: TZ	Štampa
Vrsta rada: VR	Magistarski rad
Autor: AU	Silvia Likavec
Mentor/Komentor: MN	Prof. dr. Silvia Gilezan
Naslov rada: NR	Metod redukcije u lambda računu sa tipovima sa presekom
Jezik publikacije: JP	Srpski
Jezik izvoda: JI	Srpski
Zemlja publikovanja: ZP	Srbija i Crna Gora
Uže geografsko područje: UGP	Vojvodina
Godina: GO	2005
Izdavač: IZ	Fakultet tehničkih nauka
Mesto i adresa: MA	21000 Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 6

Fizički opis rada: (poglavlja/strana/citata/ tabela/slika/grafika/priloga) FO	6/102/0/0/0/0/0
Naučna oblast: NO	Matematika
Naučna disciplina: ND	Matematika u tehnici
Predmetna odrednica/ ključne reci: PO/UDK	Matematika, logika, lambda račun, tipovi sa presekom, metod redukcije, jaka normalizacija
Čuva se: CU	U biblioteci Fakulteta tehničkih nauka
Važna napomena: VN	
Izvod: IA	U radu je analiziran opšti metod redukcije u lambda računu sa tipovima i njegova primena na dokaze nekih važnih osobina lambda terma sa tipovima sa presekom.
Datum prihvatanja teme od strane NN veca: DP	30.03.2005.
Datum odbrane: DO	
Članovi komisije: KO	
Predsednik: Član: Član:	Prof. dr. Siniša Crvenoković Prof. dr. Silvia Gilezan Prof. dr. Jovanka Pantović

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF ENGINEERING
KEY WORDS DOCUMENTATION

Document type: DT	Monograph
Type of record: TR	Printed
Content code: CC	Master thesis
Author: AU	Silvia Likavec
Menthor/Comenthor: MN	Prof. Silvia Gilezan, PhD
Title: TI	Reducibility method in lambda calculus with intersection types
Language of text: LT	Serbian
Language of abstract: LA	Serbian
Country of publication: CP	Serbia and Montenegro
Locality of publication: LP	Vojvodina
Publication year: PY	2005
Publisher: PU	Faculty of engineering
Publication place: PP	21000 Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 6

Physical description: (chapters/pages/ref./tables/ pictures/graphs/appendixes) PD	6/102/0/0/0/0/0
Scientific field: SF	Mathematics
Scientific discipline: SD	Mathematics in engineering
Subject/Key words: SKW	Mathematics, logic, lambda calculus, intersection types, reducibility method, strong normalisation
Holding data: HD	Library of the Faculty of engineering
Note: N	

Abstract A	This work presents general reducibility method in typed lambda calculus and its application to the proofs of some important properties of lambda terms typable with intersection types.

Accepted by the scientific board on: ASB	30th March 2005.
Defended on: DE	
Thesis defend board: DB	
Chair:	Prof. Siniša Crvenoković, PhD
Member:	Prof. Silvia Gilezan, PhD
Member:	Prof. Jovanka Pantović, PhD

Sadržaj

Glava 1

Uvod

Matematička analiza programskih jezika započinje formulacijom tzv. "modalnih" jezika pomoću kojih se mnoge karakteristike programskih jezika mogu predstaviti u svojoj najosnovnijoj formi. Jedan od načina za proučavanje raznih koncepata koji leže u osnovi programskih jezika je *lambda račun*.

Church je razvio lambda račun tokom tridesetih godina kao deo formalne logike i formalizma za definisanje izračunljivih funkcija. Originalni sistem, koji nije imao tipove je trebao da ima jednu od osnovnih uloga u formalizaciji matematike. Ali kasnije je pronadjen paradoks u logici zasnovanoj na lambda računu bez tipova, tako da je to dovelo do razvoja lambda računa sa tipovima kao jednog dela konzistentne logike višeg reda sa tipovima.

1936. Kleene je dokazao da su sve funkcije prirodnih brojeva koje se mogu definisati u lambda računu zapravo rekurzivne funkcije. Zatim je Turing 1937. dokazao da se sve numeričke funkcije koje se mogu predstaviti u lambda računu mogu izračunati pomoću Turingovih mašina. Ovi rezultati su uspostavili vezu izmedju lambda računa i ostalih modela izračunljivosti. Nakon otkrića računara, lambda račun je bitno uticao na razvoj LISP-a krajem pedesetih godina. Vremenom je pokazano da se bolje razumevanje semantike programskih jezika može postići proučavanjem lambda računa. Osim toga, razne varijante i ekstenzije lambda računa dovele su do razvoja velikog broja kako funkcionalnih, tako i objektno-orijentisanih programskih jezika.

Lambda račun bez tipova

Lambda račun formalizuje algoritamski pojam funkcije i služi kao osnovni mehanizam za konstrukciju funkcija višeg reda. Izrazi u ovoj formalnoj teoriji se nazivaju lambda termi i svaki ovakav izraz označava funkciju.

Dva osnovna pojma u lambda računu su apstrakcija i aplikacija. Lambda apstrakcija se koristi za zapis funkcija, dok aplikacija omogućava korišćenje funkcija koje smo definisali. Ako sa $M(x)$ označimo izraz koji zavisi od x onda se lambda apstrakcija označava sa $\lambda x.M(x)$ i intuitivno predstavlja preslikavnje $x \mapsto M(x)$. Aplikacija funcije M na argument N se označava sa MN.

Lambda račun sa tipovima

Iako lambda račun bez tipova predstavlja jednostavniji model za opisivanje programskih jezika, lambda račun sa tipovima omogućuje njihovu dublju i detaljniju analizu. Korišćenjem lambda računa sa tipovima sa strukturama podataka koje imaju tipove koji odgovaraju tipovima u programskim jezicima, moguće je vrlo verno modelirati ekspresivnost i ograničnja programskih jezika.

U većini programskih jezika, tipska ispravnost programa se proverava ili u toku kompilacije ili u toku izvršenja programa.

U lambda računu sa tipovima, domen funkcije je odredjen tipom formalnog parametra. Ako je M dobro formiran izraz, pod pretpostavkom da promenljiva x ima tip σ , tada izraz $\lambda x : \sigma.M$ označava funkciju koja preslikava x iz σ u vrednost odredjenu sa M. Jednostavan primer je lambda term

$$\lambda x : nat.x$$

koji predstavlja identično preslikavanje u skupu prirodnih brojeva.

Kako postoje dve verzije lambda računa sa tipovima, moguće je formulisati tipske sisteme na dva načina. U tipskom sistemu *à la Church* tip je nerazdvojni deo lambda terma, odnosno svaki term ima svoj jedinstveni tip. U tipskom sistemu *à la Curry* postoje odredjena pravila za dodeljivanje tipova na osnovu kojih je moguće dodeliti beskonačno mnogo tipova lambda termima bez tipova.

Ne svi lambda termi imaju tip i u različitim tipskim sistemima razlikuju se klase terma koji imaju tip, kao i tipovi koji im se mogu dodeliti.

Osnovni tipski sistem $\lambda\!\to$, koji se naziva i Curry-jev tipski sistem može biti dat na oba načina. Tipovi u ovom sistemu se formiraju koristeći jedino operaciju strelica $\to$. Aplikacija lambda terma dovodi do eliminacije strelice, dok je apstrakcija uvodi.

Jedna od vrlo značajnih ekstenzija Curry-jevog sistema $\lambda\!\to$ je proširenje sa tipovima sa presekom. Ovaj sistem je definisan u Coppo i dr. [9], Barendregt i dr. [4], i Copo i dr. [10] i označava se sa $\lambda\cap\Omega$. Osim operacije $\to$, uvodi se presek $\cap$ kao nova operacija za formiranje tipova i time dozvoljava mogućnost da jedan term ima dva tipa σ i τ istovremeno.

Kako je pojam tipova sa presekom zasnovan na intuitivnoj skupovnoj interpretaciji, sasvim prirodno se uvodi i univerzalni tip ω koji može biti dodeljen svakom lambda termu. Zbog toga je problem tipiziranja trivijalan u ovom sistemu. Ali ovaj sistem nam omogućava vrlo jasnu karakterizaciju klase terma koji imaju normalnu formu (predstavljaju skup totalno rekurzivnih funkcija), početnu normalnu formu i osobinu jake normalizacije.

U ovom radu, biće proučavan sistem $\lambda\cap\Omega$, kao i njegove restrikcije $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}\Omega$ i $\lambda\cap$.

Metod redukcije

U poslednje vreme ponovo raste zanimanje za razne vidove interpretacija pomoću realizabilnosti (realizability interpretation) narocito u semantikama teorije tipova za konstruktivno zaključivanje i semantikama programskih jezika. Skupovno-teoretska interpretacija tipova sa presekom i zasićenih skupova omogućava upotrebu metoda redukcije ili logičkih relacija u dokazima mnogih važnih osobina terma koji imaju tip u ovim sistemima.

Metod redukcije, zasnovan na interpretaciji tipova, je prvi put korišten u Tait [36] za dokaz jake normalizacije za tipski sistem $\lambda\!\to$. Osim jake normalizacije, metod redukcije se može upotrebiti za dokaz konfluencije (Church Rosser-ove osobine) kao i drugih osnovnih rezultata u ovom sistemu i u drugim tipskim sistemima. Takodje, ovaj metod je vrlo pogodan za karakterizaciju raznih klasa lambda terma kao što su termi sa osobinom jake normalizacije, termi koji imaju normalnu formu, termi koji imaju početnu normalnu formu ili slabu početnu normalnu formu.

Kako se ovaj metod može primeniti i na tipske sisteme sa presekom, u ovom radu ćemo ga iskoristiti da bi na uniforman način dokazali neke redukcijske osobine lambda terma koji imaju tip u ovom sistemu.

Osnovna ideja metoda redukcije je da se nadje veza izmedju lambda terma koji imaju tip u odredjenom sistemu i lambda terma koji zadovoljavaju odredjene redukcijske osobine (na primer konfluenciju, osobinu jake normalizacije). Zbog toga se tipovi interpretiraju odgovarajućim skupovima lambda terma: zasićenim i stabilnim skupovima u Tait [36] i Krivine [28] i dozvoljenim relacijama u Mitchell [31] i [32]. Ove interpretacije su zasnovane na skupovima lambda terma koje posmatramo i omogućuju nam dokaz valjanost dodeljivanja tipova. Kao posledicu valjanosti dobijamo činjenicu da svaki term koji ima tip u odgovarajućem sistemu, pripada interpretaciji svog tipa, odnosno zadovoljava posmatranu redukcionu osobinu.

Pregled

Rad je grupisan u pet celina. U prvom delu su navedeni osnovni pojmovi i osobine koji će biti korišćeni u sledećim poglavljima. Drugi deo je posvećen osobini jake normalizacije i tipiziranju u sistemima sa presekom. Treći deo se odnosi na opšti metod redukcije u lambda računu sa tipovima i njegovu primenu na dokaze nekih vrlo važnih osobina lambda terma sa tipovima sa presekom. Rezultati iz ovog dela su dobijeni u saradnji sa Prof. dr. Silviom Gilezan i objavljeni su u [20, 21, 22]. U četvrtom delu su dati primeri primene tipova sa presekom i metoda redukcije. Poslednji, peti deo sumira date rezultate.

Prva glava *Lambda račun, kombinatori i tipovi* je uvodna i ima tri poglavlja. U prvom poglavlju navedeni su osnovni pojmovi lambda računa bez tipova, njegova sintaksa, relacije redukcije i osnovne teoreme. Drugo poglavlje daje kratak osvrt na teoriju kombinatora. Treće poglavlje sadrži osnovne pojemove i osobine vezane za lambda račun sa tipovima i tipske sisteme.

Druga glava *Jaka normalizacija i tipiziranje* se bavi jednom od vrlo važnih osobina jake normalizacije i tipiziranjem terma u različitim tipskim sistemima sa presekom. Ova glava ima dva poglavlja. U prvom poglavlju pokazano je da svi termi koji imaju osobinu jake normalizacije imaju tip u sistemu $\mathcal{D}$ i $\lambda\cap$. Takodje, dat je osvrt na relacije redukcije i ekspanzije u ovim sistemima. U drugom poglavlju pokazano je da svi termi koji imaju tip u sistemima $\mathcal{D}$ i $\lambda\cap$ imaju osobinu jake normalizacije. Ideja opšteg metoda redukcije pokazanog u Trećoj glavi zasnovana je na ovom dokazu.

Treća glava *Opšti metod redukcije* ima četiri poglavlja. Osnovna ideja metoda redukcije, data u prvom poglavlju, je interpretacija tipova kao odgovarajućih skupova lambda terma koji zadovoljavaju odgovarajuće osobine. Pomoću ovog metoda dokazuju se redukcijske osobine lambda terma koji imaju tipove sa presekom. Razlikujemo dve različite vrste interpretacije tipova u odnosu na dati skup $\mathcal{P} \subseteq \Lambda$ u odsustvu η-redukcije. Takodje, razlikujemo dve različite vrste uslova koje dati skup $\mathcal{P} \subseteq \Lambda$ treba da zadovoljava. Kombinujući različite interpretacije tipova sa odgovarajućim uslovima za skup $\mathcal{P} \subseteq \Lambda$ dobija se semantika i može se dokazati valjanost u oba slučaja.

Osobina jake normalizacije lambda terma koji imaju tip može se dokazati pomoću obe kombinacije i ovo je pokazano u drugom poglavlju. Osim toga pokazano je postojanje normalne forme, jedinstvenost normalne forme i konačnost redukcije sa leve strane u sistemu $\lambda\cap$. Metod sa jačim uslovima za $\mathcal{P}$ i odgovarajućom interpretacijom tipova dat u trećem poglavlju dovodi do uniforminh dokaza konfluencije $\beta\eta$-redukcije i jedinstvenosti $\beta\eta$-normalne forme za lambda terme koji imaju tip u sistemu $\lambda\cap$. Metod sa slabijim uslovim za $\mathcal{P}$ i odgovarajućom jakom interpretacijom tipova je u četvrtom poglavlju primenjen na dokaze konfluencije β-redukcije, standardizacije i konačnosti razvoja u sistemu $\lambda\cap\Omega$ i u celom skupu Λ.

Četvrta glava *Primena tipova sa presekom i metoda redukcije* ima dva poglavlja. U prvom poglavlju je pokazano kako se tipovi sa presekom mogu iskoristiti da bi se konstruisali lambda modeli koji karakterišu grupe lambda terma sa odredjenim osobinama. U drugom poglavlju je analizirana koegzistencija tipova sa presekom i computational effects.

U **petoj glavi** *Zaključak* sumirani su rezultati prezentovani u ovom radu.

Glava 2

Lambda račun, kombinatori i tipovi

Prvo poglavlje je uvodno i u njemu su dati osnovni pojmovi lambda računa bez tipova, teorije kombinatora, i osnovnih tipskih sistema. Za lambda račun bez tipova, osnovna literatura je Barendregt [2], dok je za lambda račun sa tipovima osnovna literatura Barendregt [3]. Poglavlje 2.1 se bavi lambda računom bez tipova, njegovom sintaksom, pojmom redukcije i osnovnim teoremama. Poglavlje 2.2 daje kratak pregled teorije kombinatora dok Poglavlje 2.3 sadrži osnovne pojmove o tipskim sistemima sa presekom.

2.1 Lambda račun bez tipova

Lambda račun je prvobitno formalizovao Church 1930-ih godina kao deo opšte teorije funkcija i logike. Kasnije je pokazano da je ceo sistem bio nekonzistentan. Ali podsistem koji se bavio samo funkcijama se pokazao kao uspešan model za izračunljive funkcije. Ovaj sistem se danas zove *lambda račun*.

Iako lambda račun ima veoma jednostavnu sintaksu, on predstavlja osnovu za implementaciju i dizajn mnogih programskih jezika. Lambda račun poseduje mnoge odlike programskih jezika i, mnogi problemi, naročito oni koji se odnose na pozive procedura, su u osnovnoj formi. Na primer, vezane promenljive u lambda računu odgovaraju formalnim parametrima u proceduri. U LISP-u, procedure mogu biti argumenti procedura, a procedure mogu čak biti i izlazne vrednosti procedura. Programski jezici GENDAKEN i

FORSYTHE koje je dizajnirao Reynolds su eksplicitno zasnovani na lambda računu. Zbog ovih sličnosti, teoretska studija lambda računa u mnogome pomaže u razvijanju funkcionalnih programskih jezika.

Lambda račun je formalna teorija koja se bavi funkcijama i konstrukcijom novih funkcija. Izrazi u ovoj formalnoj teoriji se nazivaju lambda termi i svaki ovakav izraz označava funkciju.

Dve osnovne operacije lambda računa su *aplikacija* i *apstrakcija*. Primena funkcije M na argument N se označava sa MN. Kao što je primećeno u Barendregt [3], izraz MN označava podatak M koji se smatra algoritmom, primenjen na argument N koji se smatra ulaznim podatkom. Moguća je takodje i samoaplikacija MM koja je korisna kod simulacije rekurzije. Ako je $M(x)$ izraz koji zavisi od x, tada apstrakcija $\lambda x.M(x)$ označava intuitivno preslikavanje $x \mapsto M(x)$. Promenljiva x ne mora se, u opštem slučaju, pojavljivati u M i tada je M konstantna funkcija čija je vrednost M.

Jedan od načina za razumevanje lambda terma je poredjenje sa alternativnim načinima za zapis funkcija. Posmatrajmo funkciju

$$\lambda x.x$$

koja predstavlja identičnu funkciju koja preslikava svaki element u samog sebe. Drugi način da se zapiše ova funkcija je

$$Id : x \mapsto x,$$

dok je u programiranju uobičajen zapis

$$Id(x) = x.$$

Medjutim, ovaj način zapisivanja funkcija nas navodi da za svaku funkciju koju napišemo pronadjemo novo ime, dok nam lambda zapis omogućuje da direktno definišemo funkcije na vrlo jasan i jednostavan način.

Još neki primeri lambda izraza su $\lambda x.x + 1$ koji definiše funkciju "sledbenik" ili $\lambda x.5$ koji označava konstantnu funkciju.

Važno je naglasiti da je λ simbol koji vezuje promenljive. To znači da u lambda termu $\lambda x.M$, promenljiva x ima istu ulogu kao, na primer, promenljiva x u izrazu $\int f(x)dx$. Dakle, $\lambda x.x$ i $\lambda y.y$ samo dva načina da se zapiše ista funkcija.

Aplikacija funkcije se u lambda računu zapisuje samo stavljanjem lambda terma pored jednog ili više argumenata. Na primer, primena funkcije $\lambda x.x$ na broj 5 se zapisuje kao

$$(\lambda x.x)5$$

Funkcije više promenljivih se takodje mogu predstaviti u lambda računu. Ovo se postiže uzastopnom upotrebom aplikacije. Ideju je prvi razvio Schönfinkel dvadesetih godina, ali se sam postupak naziva *currying* jer ga je nezavisno razvio Curry.

Currying se zasniva na sledećoj ideji: ako funkcija $f(x, y)$ zavisi od dve promenljive, tada funkcije g i h mogu biti definisane sa

$$g = \lambda y.f(x, y)$$

$$h = \lambda x.g.$$

U tom slučaju je

$$h = \lambda x.g = \lambda xy.f(x, y)$$

i

$$hxy = (\lambda x.g)xy = (\lambda xy.f(x, y))xy = f(x, y).$$

Za funkcije koje zavise od n promenljivih imamo:

$$(\lambda x_1 \ldots x_n.f(x_1, \ldots, x_n))x_1 \ldots x_n = f(x_1, \ldots, x_n).$$

U vektorskom zapisu, ova jednačina postaje

$$(\lambda \vec{x}.f(\vec{x}))\vec{x} = f(\vec{x});$$

ili uopšteno

$$(\lambda \vec{x}.f(\vec{x}))\vec{N} = f(\vec{N}).$$

2.1.1 Sintaksa

Sada smo u mogućnosti da damo formalnu definiciju lambda računa.

Alfabet lambda računa se sastoji od:

- prebrojivog skupa promenljivih $\mathcal{V} = \{x, y, z, x_1, \ldots\}$;

- prebrojivog skupa konstanti $\mathcal{C} = \{c, d, e, c_1, \ldots\}$;
- operacije aplikacije $\cdot$;
- operacije apstrakcije $\lambda x.$;
- pomoćnih simbola (,).

Definicija 2.1.1 *Skup Λ se definiše na sledeći način:*

1. $\mathcal{V} \subseteq \Lambda$, $\mathcal{C} \subseteq \Lambda$.
2. *Ako* $M, N \in \Lambda$, *onda* $(MN) \in \Lambda$.
3. *Ako* $M \in \Lambda$ *i* $x \in \mathcal{V}$, *onda* $(\lambda x.M) \in \Lambda$.

Koristeći apstraktnu sintaksu, skup Λ može biti generisan na sledeći način:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \Lambda & = & \mathtt{var} \mid \Lambda\Lambda \mid \lambda\mathtt{var}.\Lambda \\ \mathtt{var} & = & x \mid \mathtt{var}' \end{array}}$$

Za termske promenljive se koriste oznake $x, y, z, \ldots, x_1, \ldots$ dok se za lambda terme koriste oznake $M, N, P, \ldots M_1, \ldots$.

Na primer, sledeći izrazi su lambda termi:

$$x, \quad (xy), \quad (\lambda x.(yz)).$$

Zbog jednostavnosti, koriste se sledeći skraćeni zapisi:

$$\lambda x_1 x_2 \ldots x_n.M \text{ umesto } (\lambda x_1.(\lambda x_2 \ldots (x_n.M) \ldots)) \text{ i}$$

$$M_1 M_2 \ldots M_n \text{ umesto } (\ldots (M_1 M_2) \ldots M_n),$$

što znači da se lambde pridružuju na desno, dok se zagrade pridružuju na levo.

Koristeći ovu konvenciju, termi iz prethodnog primera se mogu zapisati na sledeći način:

$$x, \quad xy, \quad \lambda x.yz.$$

Definicija 2.1.2 *Pojam* podterma *se definiše na sledeći način:*

1. *M je podterm od M;*
2. *Ako je MN podterm terma P, tada su i M i N podtermi terma P;*
3. *Ako je $\lambda x.M$ podterm terma P, tada je M podterm terma P.*

Definicija 2.1.3 *Skup* $Fv(M)$ slobodnih promenljivih *lambda terma M se induktivno definiše na sledeći način:*

1. $Fv(x) = \{x\}$;
2. $Fv(MN) = Fv(M) \cup Fv(N)$;
3. $Fv(\lambda x.M) = Fv(M) \backslash \{x\}$.

Promenljiva koja nije slobodna se naziva vezana promenljiva.

Term M je *zatvoren* ili *kombinator* ako je $Fv(M) = \emptyset$. Skup zatvorenih lambda terma se označava sa Λ^0.

$M \equiv N$ je sintaksni identitet medju termima. To znači da su M i N ekvivalentni lambda termi ili se mogu dobiti jedan iz drugog preimenovanjem vezanih promenljivih. Na primer:

$$(\lambda x.x)z \equiv (\lambda x.x)z$$
$$(\lambda x.x)z \equiv (\lambda y.y)z \text{ ali}$$
$$(\lambda x.x)z \not\equiv (\lambda x.y)z.$$

$M[x := N]$ označava zamenu svih slobodnih pojavljivanja promenljive x u termu M termom N, uzimajući u obzir da slobodne promenljive u N moraju ostati slobodne u novodobijenom termu. Ovo je formalizovano u sledećoj definiciji.

Definicija 2.1.4 *(Zamena slobodnih promenljivih)*

1. $x[x := N] \equiv N$;
2. $y[x := N] \equiv y$;
3. $(PQ)[x := N] \equiv (P[x := N])(Q[x := N])$;
4. $(\lambda y.P)[x := N] \equiv \lambda y.(P[x := N]),\ y \neq x$;

5. $(\lambda x.P)[x := N] \equiv (\lambda x.P)$.

Neki od osnovnih lambda terma su sledeći:

$$\mathsf{I} \equiv \lambda x.x, \qquad \mathsf{K} \equiv \lambda xy.x, \qquad \mathsf{S} \equiv \lambda xyz.xz(yz),$$
$$\Delta \equiv \lambda x.xx, \qquad \Omega \equiv (\lambda x.xx)(\lambda x.xx),$$
$$\mathsf{Y} \equiv \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)).$$

2.1.2 Redukcije

Aksioma α-*redukcije* je

$$\lambda x.M \to_\alpha \lambda y.M[y := x],\ y \notin Fv(M).$$

Ova aksioma je poznatija kao *preimenovanje vezanih promenljivih.*

Imena vezanih promenljivih se uvak biraju tako da se razlikuju od imena slobodnih promenljivih u termu.

Definicija 2.1.5 *Aksiome i pravila lambda računa su:*

1. $M = M$;
2. $M = N \ \Rightarrow\ N = M$;
3. $M = N,\ N = L \ \Rightarrow\ M = L$;
4. $M = N \ \Rightarrow\ MP = NP$;
5. $M = N \ \Rightarrow\ PM = PN$;
6. $M = N \ \Rightarrow\ \lambda x.M = \lambda x.N$.

Osnovna aksioma lambda računa je β-*redukcija* (β-kontrakcija) i definisana je na sledeći način:

$$(\lambda x.M)N \to_\beta M[x := N],\ \text{za sve } M, N \in \Lambda,\ x \in \mathcal{V}.$$

Relacija $\to_\beta$ je zatvorena u odnosu na kongruenciju.

Lambda term oblika $(\lambda x.M)N$ se naziva *redeks*, dok se term oblika $M[x := N]$ naziva *kontraktum*.

Term M se β-redukuje na term N, oznaka

$$M \twoheadrightarrow_\beta N,$$

ako postoje termi $M \equiv M_1, \ldots, M_n \equiv N$, takvi da za svako $i \in \{1, \ldots n\}$, $M_i \rightarrow_\beta M_{i+1}$. Dakle, relacija $\twoheadrightarrow_\beta$ je tranzitivno i refleksivno zatvorenje relacije $\rightarrow_\beta$. *β-jednakost*, $=_\beta$, je simetrično zatvorenje relacije $\twoheadrightarrow_\beta$. Zbog jednostavnosti, koristićemo oznaku $\rightarrow$ umesto $\rightarrow_\beta$ i $\twoheadrightarrow$ umesto $\twoheadrightarrow_\beta$.

Ekspanzija je relacija inverzna relaciji redukcije, što znači da je u prethodnom slučaju term M ekspanzija terma N.

Definicija 2.1.6 *Ako je $M \in \Lambda$ lambda term, njegovi redeksi se definišu induktivno:*

1. *Ako $x \in \mathcal{V}$, onda x nema redekse.*
2. *Ako je $M \equiv PQ$, tada su redeksi terma M redeksi terma P, redeksi terma Q i term M, ako P počinje sa λ.*
3. *Ako je $M \equiv \lambda x.N$, tada su redeksi terma M redeksi terma N.*

Ako $M \equiv \lambda x_1 \ldots x_n.(\lambda x.M_0)M_1 \ldots M_m$, $n \geq 0$, $m \geq 1$, tada se $(\lambda x.M_0)M_1$ naziva *početni redeks* terma M. Koristićemo oznaku $M \rightarrow_h M'$ ako je term M' dobijen od terma M redukovanjem početnog redeksa terma M (*početna redukcija*). Ako je term M' dobijen od terma M redukovanjem nekog drugog redeksa, koristićemo oznaku $M \rightarrow_i N$ (*unutrašnja redukcija*). Takodje ćemo koristiti tranzitivna zatvorenja ovih relacija, u oznaci $\twoheadrightarrow_h$ i $\twoheadrightarrow_i$, redom, u Glavi 3, Poglavlju 4.3.

Navešćemo sada neke specifične redukcije, koje će biti korištene u Glavi 3.

Definicija 2.1.7 *Redukcija je* standardna *ako može biti razložena na početne redukcije iza kojih slede unutrašnje redukcije.*

Standardnu redukciju ćemo označavati sa $\rightarrow_s$, a njeno refleksivno, tranzitivno zatvorenje sa $\twoheadrightarrow_s$.

Definicija 2.1.8 *Redukcija sa leve strane, $\to_\ell$, redukuje najpre "najlevlji" redeks, odnosno ako se sve kontrakcije izvode sa leva na desno, odnosno ni jedan redeks se ne redukuje ako je ostatak nekog redeksa koji se nalazi sa leve strane već redukovanog redeksa.*

Tranzitivno, refleksivno zatvorenje relacije $\to_\ell$ se označava sa $\twoheadrightarrow_\ell$.

Normalna forma je term koji ne sadrži nijedan redeks. Ako $M \twoheadrightarrow N$ i N je normalna forma, tada kažemo da M ima osobinu *normalizacije* (*ima normalnu formu*).

Term ima *osobinu jake normalizacije* ako su sve njegove redukcije konačne.

Početna normalna forma je term oblika

$$\lambda x_1 \dots x_n . y M_1 \dots M_l,$$

pri čemu y može biti neka od promenljivih x_i, $1 \leq i \leq n, 0 \leq n$ i $M_j \in \Lambda$, $1 \leq j \leq l, 0 \leq l$. Term M je *rešiv* (*ima početnu normalnu formu*) ako postoje termi $N \in \Lambda$ takvi da $M \twoheadrightarrow N$ i da N ima početnu normalnu formu. Term je *nerešiv* ako nije rešiv.

Term *ima slabu početnu normalnu formu* ako se redukuje do apstrakcije ili do terma koji počinje slobodnom promenljivom.

Na primer:

- Ω nema osobinu normalizacije i nije rešiv:

$$\Omega \to \Omega \to ...;$$

- Y nema osobinu normalizacije ali je rešiv:

$$\mathsf{Y} \to \lambda f.f((\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))) \to \lambda f.ff...;$$

- $\mathsf{KI}\Omega$ ima osobinu normalizacije, ali nema osobinu jake normalizacije:

$$\mathsf{KI}\Omega \to \mathsf{I},$$

$$\mathsf{KI}\Omega \to \mathsf{KI}\Omega \to \mathsf{KI}\Omega \to ...;$$

- KIS ima osobinu jake normalizacije:

$$\mathsf{KIS} \to \mathsf{I}.$$

Osnovna aksioma η-*redukcije* je

$$\lambda x.Mx \to_\eta M,\ x \notin Fv(M).$$

Relacija $\to_\eta$ je zatvorena u odnosu na kongruenciju.

Term oblika $\lambda x.Mx$, gde $x \notin Fv(M)$, se naziva η-*redeks*. Tranzitivno refleksivno zatvorenje relacije $\to_\eta$ je $\twoheadrightarrow_\eta$. η-*jednakost*, $=_\eta$, je simetrično zatvorenje relacije $\twoheadrightarrow_\eta$.

$\beta\eta$-*normalna forma* je term koji ne sadrži ni redeks, ni η-redeks.

2.1.3 Osnovne teoreme

U ovom delu biće navedene neke od osnovnih teorema lambda računa. Neke od njih koje se odnose na redukcijske osobine lambda terma koji imaju tip će biti dokazane u Poglavljima 4.3, 4.2.4 i 4.4.

Teorema 2.1.9 *Skup svih normalnih formi*

$$N = \{M \in \Lambda \mid M \textit{ je normalna forma}\}$$

se može induktivno okarakterisati:

1. $x \in N$ *za svako* $x \in \mathcal{V}$.
2. *Ako* $M_1, \dots, M_n \in N$, *onda* $xM_1 \dots M_n \in N$.
3. *Ako* $M \in N$, *onda* $\lambda x.M \in N$.

Dakle, sve normalne forme su oblika:

$$\lambda y_1 \dots y_n.zN_1 \dots N_k,$$

gde su termi $N_i,\ 1 \le i \le k,\ 0 \le k$, takodje normalne forme, a z može biti jedna od promenljivih $y_j,\ 1 \le j \le n,\ 0 \le n$.

Teorema 2.1.10 (Church-Rosser, Konfluencija) *Ako* $M_1 \twoheadleftarrow M \twoheadrightarrow M_2$, *tada postoji lambda term* $M_3 \in \Lambda$ *takav da* $M_1 \twoheadrightarrow M_3 \twoheadleftarrow M_2$.

Ova teorema može biti predstavljena sledećim dijagramom, pri čemu strelice predstavljaju β-redukciju $\twoheadrightarrow$:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ M_1 \arrow[dr] & & M_2 \arrow[dl] \\ & M_3 & \end{tikzcd}$$

Posledica 2.1.11 *1. Lambda term ima najviše jednu normalnu formu, odnosno normalna forma terma je jedinstvena.*

2. Ako je $M = N$, tada postoji lambda term S takav da $M \twoheadrightarrow S$ i $N \twoheadrightarrow S$.

3. Ako M i N imaju osobinu normalizacije i $M = N$, tada ova dva terma imaju istu normalnu formu.

Teorema 2.1.12 (Konfluencija $\beta\eta$-redukcije) *Ako $M_1 \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} M \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} M_2$, tada postoji lambda term $M_3 \in \Lambda$ takav da $M_1 \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} M_3 \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} M_2$.*

Tvrdjenje 2.1.13 *Svaka redukcija može biti razložena na početnu redukciju nakon koje sledi unutrašnja redukcija.*

Teorema 2.1.14 (Teorema o standardizaciji) *Ako $M \twoheadrightarrow N$, tada postoji "standardna" redukcija od terma M do terma N, odnosno $M \twoheadrightarrow_s N$.*

Teorema 2.1.15 (Konačnost redukcije sa leve strane) *Ako M ima normalnu formu, tada redukovanjem "najlevljeg" redeksa dolazimo do te normalne forme, odnosno redukcija sa leve strane ima osobinu normalizacije.*

Još jedna važna teorema lambda računa je sledeća:

Teorema 2.1.16 *(Teorema o nepokretnoj tački)*

1. Za svaki lambda term $M \in \Lambda$ postoji term $N \in \Lambda$ takav da $MN = N$.

2. Postoji fiksni kombinator

$$\mathsf{Y} \equiv \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$$

takav da je $M(\mathsf{Y}M) = \mathsf{Y}M$ za sve terme $M \in \Lambda$.

2.2 Teorija kombinatora

Uz pomoć kombinatora, uvedena je još jedna teorija koja se bavi funkcijama, kao analogon lambda računa. Ovu teoriju su nezavisno formalizovali Schönfinkel 1920-ih godina i Curry 1930-ih godina. Osnovna ideja koja je podstakla uvodjenje kombinatora je reprezentacija funkcija bez upotrebe promenljivih. Na taj način moguće je opisati osobine operacija i logičkih veznika u njima.

Alfabet teorije kombinatora se sastoji od:

- prebrojivog skupa promenljivih $\mathcal{V} = \{x, y, z, x_1, \ldots\}$;
- prebrojivog skupa konstanti $\mathcal{C} = \{c, d, e, c_1, \ldots\}$;
- skupa osnovnih kombinatora $\mathcal{B} = \{\mathsf{K}, \mathsf{S}, \mathsf{I}\}$;
- operacije aplikacije $\cdot$;
- pomoćnih simbola (,).

Definicija 2.2.1 *Skup C kombinatornih izraza se definiše na sledeći način:*

1. $\mathcal{V} \subseteq C$, $\mathcal{C} \subseteq C$, $\mathcal{B} \subseteq C$.
2. *Ako* $E_1, E_2 \in C$, *onda* $(E_1 E_2) \in C$.

Kombinatori su kombinatorni izrazi bez promenljivih.

Zbog jednostavnosti, koristićemo sledeću skraćenicu:

$$E_1 E_2 \ldots E_n \text{ umesto } (\ldots(E_1 E_2) \ldots E_n),$$

što znači da su prilikom aplikacije zagrade pridružene na levo.

Definicija 2.2.2 *Aksiome i pravila teorije kombinatora su sledeća:*

1. $\mathsf{I} E_1 = E_1$;
2. $\mathsf{K} E_1 E_2 = E_1$;

3. $\mathsf{S}E_1E_2E_3 = E_1E_3(E_2E_3)$;

4. $E_1 = E_1$;

5. $E_1 = E_2 \ \Rightarrow \ E_2 = E_1$;

6. $E_1 = E_2,\ E_2 = E_3 \ \Rightarrow \ E_1 = E_3$;

7. $E_1 = E_2,\ E_3 = E_4 \Rightarrow E_1E_3 = E_2E_4$.

Primetimo da je $\mathsf{I} = \mathsf{SKK}$.

Analogno kao u lambda računu, definiše se kombinatorna redukcija.

Definicija 2.2.3 *Ako su E i F kombinatorni izrazi, tada $E \to_C F$ ako je $E = F$ ili ako se F može dobiti od E primenom sledećih pravila:*

1. $\mathsf{K}E_1E_2 \to_C E_1$;

2. $\mathsf{S}E_1E_2E_3 \to_C E_1E_3(E_2E_3)$;

3. $\mathsf{I}E_1 \to_C E_1$.

Kombinatorni izraz je *kombinatorna normalna forma* ako ne sadrži podizraze oblika $\mathsf{K}E_1E_2$ ili $\mathsf{S}E_1E_2E_3$. U tom slučaju teorema o normalizaciji važi za kombinatorne izraze.

Svaki lambda term može biti izražen ekvivalentnim kombinatornim izrazom. Ovo je poznato kao *funkcionalna kompletnost kombinatora*.

Primetimo da pojam apstrakcije nije deo formalizma. Zbog toga se definiše operator λ^*x koji će biti korišten da simulira apstrakciju.

Definicija 2.2.4 *Neka je x proizvoljna promenljiva i E proizvoljan kombinatorni izraz. Tada se kombinatorni izraz $\lambda^*x.E$ induktivno definiše na sledeći način:*

1. $\lambda^*x.x = \mathsf{I}$;

2. $\lambda^*x.y = \mathsf{K}y, \ \ (x \neq y)$;

3. $\lambda^*x.C = \mathsf{K}C$, ($C$ je kombinator);

4. $\lambda^* x.(E_1 E_2) = \mathsf{S}(\lambda^* x.E_1)(\lambda^* x.E_2)$.

Primer 2.2.5 $\lambda^* x.fx = \mathsf{S}(\lambda^* x.f)(\lambda^* x.x) = \mathsf{S}(\mathsf{K}f)\mathsf{I}$.

Da bi se dobila ekstenzionalna jednakost kombinatornih terma proširićemo Definiciju 2.2.2 sa sledećim pravilom

$$E_1 = E_2 \;\Rightarrow\; \lambda^* x.E_1 = \lambda^* x.E_2.$$

Naravno, postoji vrlo jaka veza izmedju ova dva sistema. Možemo definisati preslikavanje

$$(\;)_\lambda : C \to \Lambda$$

koje preslikava proizvoljni kombinatorni izraz E u lambda term $(E)_\lambda$ i preslikavanje

$$(\;)_C : \Lambda \to C$$

koje preslikava proizvoljni lambda term M u kombinatorni izraz $(M)_C$.

Definicija 2.2.6 *1.* $(x)_\lambda = x$;

2. $(\mathsf{I})_\lambda = \lambda x.x$;

3. $(\mathsf{K})_\lambda = \lambda xy.x$;

4. $(\mathsf{S})_\lambda = \lambda xyz.xz(yz)$;

5. $(E_1 E_2)_\lambda = (E_1)_\lambda (E_2)_\lambda$.

Definicija 2.2.7 *1.* $(x)_C = x$;

2. $(MN)_C = (M)_C (N)_C$;

3. $(\lambda x.M)_C = \lambda^* x.(M)_C$.

Sledeća teorema daje ekvivalenciju izmedju teorije kombinatora i lambda računa.

Teorema 2.2.8 *Neka* $E_1, E_2 \in \mathcal{C}$ *i* $M, N \in \Lambda$. *Tada:*

1. $((E)_\lambda)_C = E$, $(\lambda^* x.E)_\lambda = \lambda x.(E)_\lambda$;

2. $((M)_C)_\lambda = M$;

3. $E = F$ *ako i samo ako* $(E)_\lambda = (F)_\lambda$;

4. $M = N$ *ako i samo ako* $(M)_C = (N)_C$.

2.3 Lambda račun sa tipovima

2.3.1 Tipovi

Tipovi su sintaktički objekti koji se dodeljuju lambda termima da bi bliže odredili osobine tih lambda terma.

Tip dodeljen termu može se uporediti sa dimenzijom fizičkog entiteta. Takodje, termi i njihovi tipovi mogu se posmatrati kao programi i njihove specifikacije. Koriste se da poboljšaju efikasnost kompilacije terma koji predstavljaju funkcionalne algoritme.

Postoje dve različita načina formulisanja tipskih sistema. U lambda računu koji je uveo Curry, termi se biraju iz teorije bez tipova i svakom termu može biti dodeljeno beskonačno mnogo tipova. U sistemu koji je formulisao Church, svaki term ima tip koji je jedinstven. Detaljan pregled ova dva sistema je dat u Barebdregt [3].

Ovim različitim pristupima u formiranju tipskih sistema odgovaraju dve različite paradigme u programiranju. Prva se zove “implicitno dodeljivanje tipova”, dok je druga poznata kao ”eksplicitno dodeljivanje tipova”. Tipični predstavnici prve grupe su programski jezici ML i HASKELL, dok su primeri za drugu tehniku programski jezici ALGOL i PASCAL. Neki autori nazivaju Curry-jev sistem ”lambda račun sa dodeljivanjem tipova”, a Church-ov sistem ”lambda račun sa tipovima”.

Još jedan pristup interpretaciji tipskih sistema je “Curry-Howard-ova korespondencija” ili interpretacija formula konstruktivne logike kao tipova i dokaza kao terma (Howard [25]). Na osnovu ove analogije, tipovi koji odgovaraju lambda termima u sistemu $\lambda\!\rightarrow$ odgovaraju formulama koje se mogu dokazati u intuicionističkoj logici. Logička interpretacija tipova sa presekom je data u Dezani i dr. [14].

2.3.2 Tipski sistemi

Osnovni tipski sistem $\lambda\!\rightarrow$, koji se naziva i Curry-jev tipski sistem može biti dat na oba načina. Jedina operacija koja se koristi za formiranje tipova je strelica. Aplikacija lambda terma dovodi do eliminacije strelice, dok je apstrakcija uvodi.

Poznata su mnoga proširenja tipskog sistema $\lambda\!\rightarrow$. Jedan od njih je tipski sistem sa presekom ili Torino sistem. Ovaj sistem su formulisali M. Dezani-Ciancaglini i M. Coppo u [8] i Coppo i dr. u [9] i [10]. Tipski sistem sa presekom je uopštenje Curry-jevog tipskog sistema i uveden je da bi se mogla okarakterisati šira klasa lambda terma nego u sistemu $\lambda\!\rightarrow$. Njegova osnovna odlika je novi operator za formiranje tipova, presek $\cap$, čije su osobine u skladu sa njegovom interpretacijom kao presek tipova. U ovom sistemu je moguće dodeliti termu dva tipa σ i τ istovremeno. Lambda termi koji imaju osobinu jake normalizacije su jedini termi koji imaju tip u ovom sistemu. Glava 2 je posvećena ovoj izuzetno važnoj osobini tipskih sistema sa presekom.

Druga značajna odlika tipskih sistema sa presekom je novi tip ω koji može biti dodeljen svakom lambda termu. Zbog toga je tipizacija terma u ovom sistemu trivijalna.

Sledeća definicija daje formalizaciju *tipskog sistema sa presekom*, koji se označava sa $\lambda\cap\Omega$.

Definicija 2.3.1 *Skup tipova* `type` *se definiše na sledeći način:*

1. $V = \{\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \ldots\} \subset \mathtt{type}$ *(V je prebrojiv skup tipskih promenljivih);*
2. *Ako* $\sigma, \tau \in \mathtt{type}$*, onda* $(\sigma \rightarrow \tau) \in \mathtt{type}$*;*
3. *Ako* $\sigma, \tau \in \mathtt{type}$*, onda* $(\sigma \cap \tau) \in \mathtt{type}$*;*
4. $\omega \in \mathtt{type}$.

Definicija 2.3.2 *Koristeći apstraktnu sintaksu, skup tipova može biti definisan na sledeći način:*

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \mathtt{type} & = & \omega \mid \mathtt{atom} \mid \mathtt{type} \rightarrow \mathtt{type} \mid \mathtt{type} \cap \mathtt{type} \\ \mathtt{atom} & = & \alpha \mid \mathtt{atom}' \end{array}}$$

Za tipske promenljive koristićemo oznake $\alpha, \beta, \ldots$, dok će proizvoljni tipovi biti označeni sa $\sigma, \tau, \ldots$.

Definicija 2.3.3

1. Iskaz *je izraz oblika* $M : \varphi$, *gde* $M \in \Lambda$ *i* $\varphi \in$ `type`*. Tip* φ *se naziva* predikat*, dok se term* M *naziva* subjekat *iskaza.*

2. Deklaracija *je iskaz gde se kao subjekat javlja (termska) promenljiva.*

3. Baza Γ *je skup* $\{x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n\}$ *deklaracija u kojem su sve termske promenljive različite i* $\mathrm{Dom}\,\Gamma = \{x_1, \ldots, x_n\}$*.*

4. Ako su Γ *i* Γ' *baze, tada se proizvod baza* $\Gamma \uplus \Gamma'$ *definiše kao baza (vidi Dezani [15]):*

$$\begin{aligned} \Gamma \uplus \Gamma' &= \{x : \sigma \cap \tau \mid x : \sigma \in \Gamma \ i \ x : \tau \in \Gamma'\} \\ &\cup \ \{x : \sigma \mid x : \sigma \in \Gamma \ i \ x \notin Dom\Gamma'\} \\ &\cup \ \{x : \tau \mid x : \tau \in \Gamma' \ i \ x \notin Dom\Gamma\}. \end{aligned}$$

Koristićemo slova grčkog alfabeta $\Gamma, \Delta, \Gamma_1, \ldots$ kao shematske oznake za baze.

Definicija 2.3.4 (Relacija poretka na skupu `type`) *(i) Relacija* $\leq$ *se definiše na skupu* `type` *sledećim aksiomama i pravilima:*

1. $\sigma \leq \sigma$
2. $\sigma \leq \tau,\ \tau \leq \rho\ \Rightarrow \sigma \leq \rho$
3. $(\sigma \to \rho) \cap (\sigma \to \tau) \leq \sigma \to (\rho \cap \tau)$
4. $\sigma \cap \tau \leq \sigma,\ \sigma \cap \tau \leq \tau$
5. $\sigma \leq \tau,\ \sigma \leq \rho \Rightarrow \sigma \leq \tau \cap \rho$
6. $\sigma \leq \sigma',\ \tau \leq \tau' \Rightarrow \sigma' \to \tau \leq \sigma \to \tau'$
7. $\sigma \leq \omega$
8. $\sigma \to \omega \leq \omega \to \omega$

(ii) Pomoću relacije $\leq$ *se uvodi relacija ekvivalencije na sledeći način:*
$\sigma \sim \tau \Leftrightarrow \sigma \leq \tau \ \&\ \tau \leq \sigma$*.*

Na primer:

$$\omega \sim (\omega \to \omega)$$
$$((\sigma \cap \sigma') \to \tau) \sim ((\sigma \to \tau) \cap (\sigma' \to \tau)).$$

Definicija 2.3.5 *Tipski sistem $\lambda\cap\Omega$ je definisan sledećom aksiomom i pravilima:*

(ax)	$\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma$
$(\to E)$	$\dfrac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau}$
$(\to I)$	$\dfrac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.M : \sigma \to \tau}$
$(\cap E)$	$\dfrac{\Gamma \vdash M : \sigma \cap \tau}{\Gamma \vdash M : \sigma \quad \Gamma \vdash M : \tau}$
$(\cap I)$	$\dfrac{\Gamma \vdash M : \sigma \quad \Gamma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash M : \sigma \cap \tau}$
$(\leq)$	$\dfrac{\Gamma \vdash M : \sigma, \quad \sigma \leq \tau}{\Gamma \vdash M : \tau}$
(ω)	$\dfrac{}{\Gamma \vdash M : \omega}$

Različitim kombinacijama gore navedenih pravila mogu se dobiti razni tipski sistemi koji se mogu posmatrati kao restrikcije sistema $\lambda \cap \Omega$. Ovi sistemi su dati sledećim aksiomama i pravilima:

- $\lambda\!\to$, *osnovni tipski sistem*: (ax), $(\to E)$, i $(\to I)$;
- $\mathcal{D}$, *osnovni tipski sistem sa presekom*: (ax), $(\to E)$, $(\to I)$, $(\cap E)$, i $(\cap I)$.
- $\mathcal{D}\Omega$: (ax), $(\to E)$, $(\to I)$, $(\cap E)$, $(\cap I)$, i (ω).
- $\lambda\cap$: (ax), $(\to E)$, $(\to I)$, $(\cap E)$, $(\cap I)$, i $(\leq)$.

Veze izmedju ovih sistema su date u sledećem dijagramu:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{D} & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \mathcal{D}\Omega & & & & \lambda\cap \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & \lambda\cap\Omega & & \end{array}$$

Mi ćemo najviše proučavati sisteme $\lambda\cap$ i $\lambda\cap\Omega$. Obimna studija sistema $\mathcal{D}$ i $\mathcal{D}\Omega$ data je u Krivine [28].

U osnovnom tipskom sistemu, $\lambda\!\rightarrow$, tipovi mogu biti dodeljeni samo podklasi klase lambda terma koji imaju osobinu jake normalizacije. Postoje čak i normalne forme koje nemaju tip u ovom sistemu, na primer $\lambda x.xx$. Ovaj term ima tip u sistemu $\mathcal{D}$, a samim tim i u ostalim tipskim sistemima sa presekom.

U osnovnom tipskom sistemu sa presekom $\mathcal{D}$ tip imaju jedino lambda termi koji imaju osobinu jake normalizacije. U tipskom sistemu $\lambda\cap\Omega$ svi lambda termi imaju tip.

Sada ćemo dati primere tipiziranja u sistemu $\lambda\!\rightarrow$ i njihova izvodjenja:

1. $\vdash\ \mathsf{I} : \alpha \rightarrow \alpha$ (samoaplikacija);

$$\frac{x : \alpha \vdash x : \alpha}{\vdash \lambda x.x : \alpha \rightarrow \alpha}\ .$$

2. $\vdash\ \mathsf{K} : \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$;

$$\cfrac{\cfrac{x : \alpha,\ y : \beta \vdash x : \alpha}{x : \alpha \vdash \lambda y.x : \beta \rightarrow \alpha}}{\vdash \lambda xy.x : \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)}\ .$$

3. $\vdash\ \mathsf{S} : (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$;

$$\frac{x : \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma),\ y : \alpha \rightarrow \beta,\ z : \alpha \vdash x : \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma),\ z : \alpha}{x : \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma),\ y : \alpha \rightarrow \beta,\ z : \alpha \vdash xz : \beta \rightarrow \gamma}\ ,$$

$$\frac{x : \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma),\ y : \alpha \rightarrow \beta,\ z : \alpha \vdash y : \alpha \rightarrow \beta,\ z : \alpha}{x : \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma),\ y : \alpha \rightarrow \beta,\ z : \alpha \vdash yz : \beta}\ ,$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x:\alpha\to(\beta\to\gamma),\ y:\alpha\to\beta,\ z:\alpha\vdash xz(yz):\gamma}{x:\alpha\to(\beta\to\gamma),\ y:\alpha\to\beta\vdash\lambda z.xz(yz):\alpha\to\gamma}}{x:\alpha\to(\beta\to\gamma)\vdash\lambda yz.xz(yz):(\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\gamma)}}{\vdash\lambda xyz.xz(yz):(\alpha\to(\beta\to\gamma))\to((\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\gamma))}\ .$$

Primeri tipiziranja u sistemu $\lambda\cap$ i njihova izvodjenja:

1. $\vdash\ \lambda x.xx:(\alpha\cap(\alpha\to\beta))\to\beta$ (samoaplikacija);

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x:(\alpha\to\beta)\cap\alpha\vdash x:(\alpha\to\beta)\cap\alpha}{x:(\alpha\to\beta)\cap\alpha\vdash x:\alpha\to\beta}\quad\dfrac{x:(\alpha\to\beta)\cap\alpha\vdash x:(\alpha\to\beta)\cap\alpha}{x:(\alpha\to\beta)\cap\alpha\vdash x:\alpha}}{x:(\alpha\to\beta)\cap\alpha\vdash xx:\beta}}{\vdash\lambda x.xx:(\alpha\to\beta)\cap\alpha\to\beta}\ .$$

Primeri dodeljivanja tipova u sistemu $\lambda\cap\Omega$ i njihova izvodjenja:

1. $\vdash\mathsf{KI\Omega}:\alpha\to\alpha$ (term koji ima osobinu normalizacije);

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x:\alpha\to\alpha,y:\omega\vdash x:\alpha\to\alpha}{x:\alpha\to\alpha\vdash\lambda y.x:\omega\to(\alpha\to\alpha)}}{\vdash\lambda xy.x:(\alpha\to\alpha)\to(\omega\to(\alpha\to\alpha))}\quad\dfrac{x:\alpha\vdash x:\alpha}{\vdash\lambda x.x:\alpha\to\alpha}}{\vdash(\lambda xy.x)(\lambda x.x):\omega\to(\alpha\to\alpha)}\quad\vdash\Omega:\omega}{\vdash\mathsf{KI\Omega}:\alpha\to\alpha}\ .$$

2. $\vdash\mathsf{Y}:(\omega\to\alpha)\to\alpha$ (rešiv term);

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{f:\omega\to\alpha\vdash f:\omega\to\alpha\qquad f:\omega\to\alpha\vdash xx:\omega}{f:\omega\to\alpha\vdash f(xx):\alpha}}{f:\omega\to\alpha\vdash\lambda x.f(xx):\omega\to\alpha}\quad f:\omega\to\alpha\vdash\lambda x.f(xx):\omega}{f:\omega\to\alpha\vdash(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)):\alpha}}{\vdash\lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)):(\omega\to\alpha)\to\alpha}\ .$$

3. $\vdash\Omega:\omega$ (nerešiv term).

2.3.3 Osnovne osobine

U ovom delu navešćemo neke od osnovnih osobina tipskog sistema $\lambda\cap\Omega$ koje su dokazane u Barendregt [3].

Tvrdjenje 2.3.6 Lema o bazama

1. *Ako* $\Gamma' \supseteq \Gamma$, *onda* $\Gamma \vdash M : \sigma \Rightarrow \Gamma' \vdash M : \sigma$;
2. $\Gamma \vdash M : \sigma \Rightarrow Fv(M) \subseteq Dom\Gamma$;
3. $\Gamma \vdash M : \sigma \Rightarrow \Gamma \restriction Fv(M) \vdash M : \sigma$,

gde $\Gamma \restriction Fv(M)$ *označava restrikciju* Γ *na skup slobodnih promenljivih terma* M.

U sledećem tvrdjenju su dati uslovi koji moraju biti zadovoljeni da bi odredjeni termi imali tip.

Tvrdjenje 2.3.7 Strukturne osobine

1. *Ako* $\Gamma \vdash x : \sigma$, *onda* $x : \sigma' \in \Gamma$ *i* $\sigma' \leq \sigma$ *za neki tip* $\sigma' \in \texttt{type}$.
2. *Ako* $x \notin \Gamma$, *onda* $\Gamma \vdash \lambda x.M : \sigma \to \tau$ *ako i samo ako* $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau$.
3. *Ako* $\Gamma \vdash MN : \sigma$, *tada postoje tipovi* $\tau, \sigma' \in \texttt{type}$ *takvi da* $\Gamma \vdash M : \tau \to \sigma'$, $\sigma' \leq \sigma$ *i* $\Gamma \vdash N : \tau$.

Tvrdjenje 2.3.8 Lema o podtermima
Neka je N *podterm terma* M. *Ako* $\Gamma \vdash M : \sigma$, *tada* $\Delta \vdash N : \tau$ *za neku bazu* Δ *i tip* τ.
Dakle, ako term ima tip u $\lambda\cap\Omega$, *tada i svaki njegov podterm ima tip u datom sistemu.*

Teorema 2.3.9 *U sistemima bez tipa* ω *(*$\mathcal{D}$ *i* $\lambda\cap$*) važi*

$$M \text{ ima tip } \Leftrightarrow M \text{ ima osobinu jake normalizacije.}$$

Glava 3

Tipiziranje i jaka normalizacija

Ova Glava ima dva poglavlja da bi se istakla odredjena simetrija koja važi u nekim tipskim sistemima sa presekom. Naime, u sistemima $\mathcal{D}$ i $\lambda\cap$ važi da

$$M \text{ ima tip } \Leftrightarrow M \text{ ima osobinu jake normalizacije.}$$

U Poglavlju 3.1 posebna pažnja je posvećena tipiziranju lambda terma u tipskim sistemima sa presekom i pokazano je da svi lambda termi koji imaju osobinu jake normalizacije, imaju tip u ovim sistemima. Poglavlje 3.2 sadrži dokaz jake normalizacije za lambda terme koji imaju tip. Ovaj dokaz je osnova opšteg postupka redukcije koji je dalje razradjen u Glavi 3.

3.1 Tipiziranje terma sa osobinom jake normalizacije

U osnovi, problem tipiziranja u tipskom sistemu daje odgovor na pitanje da li dati lambda term ima ili nema tip u datom sistemu. U tipskom sistemu sa presekom $\lambda\cap\Omega$ postoji univerzalni tip ω koji može biti dodeljen svakom lambda termu u ovom sistemu. Zbog toga je pitanje tipiziranja u ovom sistemu trivijalno. Iz istog razloga, pitanje tipiziranja u sistemu $\mathcal{D}\Omega$ je takodje trivijalno. Ali bez pravila (ω), situacija je potpuno drugačija. U tipskim sistemima $\mathcal{D}$ i $\lambda\cap$, svi lambda termi koji imaju osobinu jake normalizacije imaju tip, i to su jedini lambda termi koji imaju tip u ovim sistemima. Ovo je veoma važna osobina ova dva tipska sistema i predmet je obimnog istraživanja. Prvi put je bila dokazana u Pottinger [33], Coppo et al. [10] i

Leivant [29]. Kasnije, ova tema je obradjivana u Ghilezan [18], Krivine [28] i van Bakel [38]. Kompletan dokaz se nalazi u Amadio i Curien [1].

Poznato je da jaka normalizacija nije odlučiva (vidi Barendregt [2], Poglavlje 9). Zbog toga, iz ekvivalencije jake normalizacije i tipiziranja u tipskim sistemima $\mathcal{D}$ i $\lambda\cap$ možemo zaključiti da je tipiziranje neodlučivo u ovim sistemima.

U sledeća dva poglavlja, za tipske sisteme koji sadrže tip ω koristićemo oznaku $\vdash_\Omega$, dok ćemo za sisteme $\lambda\cap$ i $\mathcal{D}$ koristiti oznaku $\vdash$.

Tvrdjenje 3.1.1 *Neka je Γ proizvoljna baza i $x_1, x_2, \ldots, x_k$ promenljive koje nisu deklarisane u Γ. Ako $\Gamma, x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_k \vdash M : \sigma$ i $\Gamma \vdash M_i : \sigma_i$ za svako i, za koje je promenljiva x_i slobodna u M $(1 \leq i \leq k)$, tada*

$$\Gamma \vdash M[x_1 := M_1, \ldots, x_k := M_k] : \sigma.$$

Posebno, ako promenljive $x_1, x_2, \ldots, x_k$ nisu slobodne u M, i ako $\Gamma, x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_k \vdash M : \sigma$, tada $\Gamma \vdash M : \sigma$.

Dokaz. Indukcijom po konstrukciji $\Gamma, x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_k \vdash M : \sigma$. Postoje tri mogućnosti za M.

1. M je promenljiva, na primer y.

   – Ako je $y \equiv x_i$, tada je $\sigma \equiv \sigma_i$ i $y[x_1 := M_1, \ldots, x_k := M_k] \equiv M_i : \sigma_i \equiv \sigma$.

   – Ako je $y \not\equiv x_i$ $(1 \leq i \leq k)$, tada je $y[x_1 := M_1, \ldots, x_k := M_k] \equiv y : \sigma$, prema tome $\Gamma \vdash M : \sigma$.

2. $M \equiv \lambda y.N$.
   Tada je na osnovu Tvrdjenja 2.3.7(2) $\sigma \equiv \tau \to \rho$ i

   $$\Gamma, x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_k, y : \tau \vdash N : \rho.$$

   Primetimo da, na osnovu konvencije o promenljivama, možemo pretpostaviti da je $y \not\equiv x_i$, $1 \leq i \leq k$. Indukcijska pretpostavka važi za term N tako da

   $$\Gamma, y : \tau \vdash N[x_1 := M_1, \ldots, x_k := M_k] : \rho.$$

Tada
$$\Gamma \vdash \lambda y.N[x_1 := M_1, \ldots, x_k := M_k] : \tau \to \rho,$$
odnosno
$$\Gamma \ \vdash \ M[x_1 := M_1, \ldots, x_k := M_k] : \sigma.$$

3. $M \equiv PQ$.
Na osnovu Tvrdjenja 2.3.7(3) sledi
$$\Gamma, x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_k \vdash P : \tau \to \sigma',\ \sigma' \leq \sigma$$
i
$$\Gamma, x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_k \ \vdash \ Q : \tau.$$
Indukcijska pretpostavka važi za terme P i Q što znači da
$$\Gamma \vdash P[x_1 := M_1, \ldots, x_k := M_k] : \tau \to \sigma',\ \sigma' \leq \sigma$$
i
$$\Gamma \ \vdash \ Q[x_1 := M_1, \ldots, x_k := M_k] : \tau.$$
Tada
$$\Gamma \ \vdash \ P[x_1 := M_1, \ldots, x_k := M_k]Q[x_1 := M_1, \ldots, x_k := M_k] : \sigma',$$
odnosno
$$\Gamma \vdash M[x_1 := M_1, \ldots, x_k := M_k] : \sigma. \diamond$$

Prilikom redukcije terma, veoma važno pitanje je da li će mu tip ostati očuvan. Odgovor na ovo pitanje je pozitivan za sva četiri sistema. Ova osobina je poznata kao zatvorenost u odnosu na β-redukciju.

Tvrdjenje 3.1.2 *Ako* $\Gamma \vdash M : \sigma$ *i* $M \twoheadrightarrow M'$, *tada* $\Gamma \vdash M' : \sigma$.

Dokaz. Indukcijom po dužini terma M. Pretpostavimo da $M \to M'$, odnosno da se term M redukuje do terma M' u jednom koraku. Razlikujemo tri moguća slučaja za term M:

1. M je promenljiva. Tada je $M \equiv M'$.

2. $M \equiv \lambda x.N$.
   Tada na osnovu Tvrdjenja 2.3.7(2) $\sigma \equiv \tau \to \rho$ i $\Gamma, x : \tau \vdash N : \rho$. Jedini način da se redukuje term M je $M \to \lambda x.N'$, gde $N \to N'$.
   Indukcijska pretpostavka važi za term N tako da $\Gamma, x : \tau \vdash N' : \rho$. Tada $\lambda x.N' : \tau \to \rho$, što znači da $\Gamma \vdash M' : \sigma$.

3. $M \equiv PQ$.
   Na osnovu Tvrdjenja 2.3.7(3) $\Gamma \vdash Q : \tau$, $\Gamma \vdash P : \tau \to \sigma'$ i $\sigma' \leq \sigma$. Prilikom redukcije terma M, postoje tri mogućnosti za term M'.

   a) $M' \equiv PQ'$, gde $Q \to Q'$.
      Indukcijska pretpostavka važi za term Q tako da $\Gamma \vdash Q' : \tau$. Odavde sledi da $\Gamma \vdash PQ' : \sigma'$, odnosno $\Gamma \vdash M' : \sigma$.
   b) $M' \equiv P'Q$, gde $P \to P'$. Analogno.
   c) $P \equiv \lambda x.R$, odnosno $M \equiv (\lambda x.R)Q$. Tada $M' \equiv R[x := Q]$.
      Na osnovu Tvrdjenja 2.3.7(2) $\Gamma \vdash \lambda x.R : \tau \to \sigma'$, $\sigma' \leq \sigma$ i $\Gamma \vdash Q : \tau$, a na osnovu Tvrdjenja 2.3.7(3) $\Gamma, x : \tau \vdash R : \sigma'$. Dakle, na osnovu Tvrdjenja 3.1.1 sledi da $\Gamma \vdash R[x := Q] : \sigma'$, odnosno $\Gamma \vdash M' : \sigma$. $\diamond$

Tvrdjenje 3.1.3 *Neka je Γ proizvoljna baza i $x_1, x_2, \ldots, x_k$ promenljive koje nisu deklarisane u Γ. Ako $\Gamma \vdash M[x_1 := M_1, \ldots, x_k := M_k] : \sigma$ i $M_1, \ldots, M_k$ imaju u Γ tipove $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ redom, tada*

$$\Gamma, x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_k \vdash M : \sigma.$$

Dokaz. Indukcijom po dužini tipa σ i (za dati tip σ) indukcijom po dužini terma M.

1. Ako je $\sigma \equiv \alpha$ tipska promenljiva, tada postoje dve mogućnosti za term M.

   a) M je promenljiva, na primer y.

      - Ako je $y \equiv x_i$ za neko $i \in \{1, \ldots, k\}$, tada $\Gamma \vdash y[x_1 := M_1, \ldots, x_k := M_k] \equiv M_i : \sigma_i$. Dakle, $\sigma_i \equiv \alpha$ i trivijalno $\Gamma, x_i : \alpha \vdash x_i : \alpha$.
      - Ako je $y \not\equiv x_i$ za svako $i \in \{1, \ldots, k\}$, tada $y[x_1 := M_1, \ldots, x_k := M_k] \equiv y$ i $\Gamma \vdash y : \alpha$. Dakle, $\Gamma, x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_k \vdash M : \sigma$

b) $M \equiv PQ$.
Ovo znači da

$$\Gamma \vdash P[x_1 := M_1, \ldots, x_k := M_k]Q[x_1 := M_1, \ldots, x_k := M_k] : \alpha.$$

Tada na osnovu Tvrdjenja 2.3.7(3)

$$\Gamma \vdash Q[x_1 := M_1, \ldots, x_k := M_k] : \tau$$

i

$$\Gamma \vdash P[x_1 := M_1, \ldots, x_k := M_k] : \tau \to \sigma',\ \sigma' \leq \alpha.$$

Na osnovu indukcijske pretpostavke

$$\Gamma, x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_k \vdash Q : \tau$$

i

$$\Gamma, x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_k \vdash P : \tau \to \sigma',\ \sigma' \leq \alpha.$$

Kako je $M \equiv PQ$, sledi da $\Gamma, x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_k \vdash M : \sigma'$, što znači da $\Gamma, x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_k \vdash M : \alpha$.

c) $M \equiv \lambda x.P$ nije moguće jer je α tipska promenljiva.

2. Neka je $\sigma \equiv \tau \cap \rho$.
Tada je $\Gamma \vdash M[x_1 := M_1, \ldots, x_k := M_k] : \tau$ i $\Gamma \vdash M[x_1 := M_1, \ldots, x_k := M_k] : \rho$. Indukcijska pretpostavka važi za tipove τ i ρ tako da

$$\Gamma, x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_k \vdash M : \tau$$

$$\Gamma, x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_k \vdash M : \rho.$$

Zbog toga $\Gamma, x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_k \vdash M : \tau \cap \rho \equiv \sigma$.

3. Neka je $\sigma \equiv \tau \to \rho$.
Tada je $M \equiv \lambda y.N$ i

$$M[x_1 := M_1, \ldots, x_k := M_k] \equiv \lambda y.N[x_1 := M_1, \ldots, x_k := M_k] : \tau \to \rho.$$

Na osnovu Tvrdjenja 2.3.7(2) $\Gamma, y : \tau \vdash N[x_1 := M_1, \ldots, x_k := M_k] : \rho$. Na osnovu indukcijske pretpostavke važi $\Gamma, y : \tau, x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_k \vdash N : \rho$. Očigledno, y nije promenljiva slobodna u M_i, inače gore navedena supstitucija ne bi bila dobro definisana. Zbog toga $\Gamma, x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_k \vdash \lambda y.N : \tau \to \rho$, odnosno $\Gamma, x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_k \vdash M : \sigma$.
$\diamond$

Napomena 3.1.4 *U sistemima $\mathcal{D}\Omega$ i $\lambda\cap\Omega$, uslov "M_i imaju tip u Γ" je trivijalan jer $\Gamma \vdash_\Omega M_i : \omega$.*

Posledica 3.1.5 *Ako $\Gamma \vdash M[x := N] : \sigma$ i N ima tip u bazi Γ, tada*

$$\Gamma \vdash (\lambda x.M)N : \sigma.$$

Dokaz. Neka $\Gamma \vdash N : \tau$. Tada na osnovu Tvrdjenja 3.1.3 $\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma$. Odavde sledi da $\Gamma \vdash \lambda x.M : \tau \to \sigma$ i $\Gamma \vdash (\lambda x.M)N : \sigma$. $\diamond$

Pojam inverzan pojmu zatvorenosti u odnosu na β-redukciju je zatvorenost u odnosu na β-ekspanziju, odnosno pitanje da li tipovi ostaju očuvani i prilikom β-ekspanzije. Odgovor na ovo pitanje je pozitivan za tipske sisteme $\mathcal{D}\Omega$ i $\lambda\cap\Omega$, ali je negativan za sisteme $\mathcal{D}$ i $\lambda\cap$. U sledećem delu, prikazaćemo dokaz zatvorenosti sistema $\mathcal{D}\Omega$ i $\lambda\cap\Omega$ u odnosu na β-ekspanziju. Takodje, daćemo kontrapreimere za sisteme $\mathcal{D}$ i $\lambda\cap$, sugerisane od strane Venneri [39].

Teorema 3.1.6 *Neka je M proizvoljan lambda term i $M \twoheadrightarrow M'$. Ako $\Gamma \vdash_\Omega M' : \sigma$, tada $\Gamma \vdash_\Omega M : \sigma$.*

Dokaz. Indukcijom po dužini tipa σ i (za dati tip σ) indukcijom po dužini terma M. Pretpostavimo da $M \to M'$, odnosno da se term M redukuje do terma M' u jednom koraku.

1. $\sigma \equiv \omega$. Trivijalno.
2. $\sigma \equiv \alpha$ je tipska promenljiva. Postoje dve mogućnosti za term M, jer opet M ne može biti apstrakcija.
   a) M je promenljiva. Tada je $M \equiv M'$ i tvrdjenje trivijalno sledi.
   b) $M \equiv PQ$. Mogućnosti za M' su:
      - $M' \equiv PQ'$, $Q \to Q'$
        Na osnovu Tvrdjenja 2.3.7(3) $\Gamma \vdash_\Omega Q' : \tau$, $\Gamma \vdash_\Omega P : \tau \to \sigma'$, $\sigma' \leq \alpha$.
        Na osnovu indukcijske pretpostavke $\Gamma \vdash_\Omega Q : \tau$. Dakle, $\Gamma \vdash_\Omega PQ : \sigma'$, odnosno $\Gamma \vdash_\Omega PQ : \alpha$.
      - $M' \equiv P'Q$. Analogno.

  - $P \equiv \lambda x.R$, što znači da je $M \equiv (\lambda x.R)Q$ i $M' \equiv R[x := Q]$. Neka $\Gamma \vdash_\Omega R[x := Q] : \alpha$. Osim toga važi $\Gamma \vdash_\Omega Q : \omega$ jer ovo važi za svaku bazu i svaki lambda term. Tada na osnovu Posledice 3.1.5 sledi da $\Gamma \vdash_\Omega (\lambda x.R)Q : \alpha$.

 c) $M \equiv \lambda x.P$. Nemoguće jer je α tipska promenljiva.

3. $\sigma \equiv \tau \cap \rho$.
   Tada $\Gamma \vdash_\Omega M' : \tau$ i $\Gamma \vdash_\Omega M' : \rho$.
   Na osnovu indukcijske pretpostavke je $\Gamma \vdash_\Omega M : \tau$ i $\Gamma \vdash_\Omega M : \rho$. Dakle, dobijamo da $\Gamma \vdash_\Omega M : \sigma$.

4. $\sigma \equiv \tau \to \rho$.
   Tada $M \equiv \lambda x.N$ i $M' \equiv \lambda x.N'$, $N \to N'$.
   Kako $\lambda x.N' : \sigma$, na osnovu Tvrdjenja 2.3.7(2) sledi da $\Gamma, x : \tau \vdash_\Omega N' : \rho$.Na osnovu indukcijske pretpostavke sledi da $\Gamma, x : \tau \vdash_\Omega N : \rho$, prema tome je $\Gamma \vdash_\Omega \lambda x.N : \tau \to \rho$, odnosno $\Gamma \vdash_\Omega M : \sigma$. $\diamond$

Napomena 3.1.7 *Teorema 3.1.6 ne važi za sisteme $\mathcal{D}$ i $\lambda\cap$.*

Teorema 3.1.8 *Neka $M =_\beta M'$. Tada*

$$\Gamma \vdash_\Omega M : \sigma \text{ ako i samo ako } \Gamma \vdash_\Omega M' : \sigma.$$

Primer 3.1.9 *Posmatrajmo terme*

$$T \equiv \lambda y.(\lambda x.y)(yy)$$

i

$$\lambda y.y$$

s obzirom na to da

$$\lambda y.(\lambda x.y)(yy) \twoheadrightarrow \lambda y.y.$$

Term $\lambda y.y$ ima tip $\alpha \to \alpha$, gde je α tipska promenljiva, dok term T nema isti tip u sistemu $\mathcal{D}$. Termska promenljiva y mora imati tip strelice da bi samoaplikacija mogla biti tipizirana u sistemu $\mathcal{D}$ ili $\lambda\cap$. Ovaj problem je izbegnut u sistemima $\mathcal{D}\Omega$ i $\lambda\cap\Omega$ jer termu yy može biti dodeljen tip ω pa je zbog toga termu T moguće dodeliti tip $\alpha \to \alpha$ u $\mathcal{D}\Omega$ i $\lambda\cap\Omega$. Ali, termu T može u sistemima $\mathcal{D}$ i $\lambda\cap$ biti dodeljen tip

$$(\alpha \cap (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \cap (\alpha \to \beta)),$$

koji takodje može biti dodeljen termu $\lambda y.y$. Dakle, oba posmatrana terma imaju isti tip i u sistemima $\mathcal{D}$ i $\lambda\cap$, ali tip $T : \alpha \to \alpha$ ne može biti izveden bez pravila (ω).

Primer 3.1.10 *U drugom kontraprimeru razmatraćemo terme*

$$L \equiv \lambda yz.(\lambda x.z)(yz)$$

i

$$\lambda yz.z$$

jer opet važi

$$\lambda yz.(\lambda x.z)(yz) \twoheadrightarrow \lambda yz.z.$$

Term $\lambda yz.z$ ima u sistemima $\mathcal{D}$ i $\lambda\cap$ tip $\beta \to (\alpha \to \alpha)$, a term L ima tip $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \alpha)$. I u ovom slučaju, termu L ne može biti dodeljen tip $\beta \to (\alpha \to \alpha)$ bez pravila (ω).

Sledeće tvrdjenje je generalizacija Posledice 3.1.5 i važi za sisteme $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}\Omega$, $\lambda\cap$ i $\lambda\cap\Omega$.

Tvrdjenje 3.1.11 *Neka su $M, N, M_1, \ldots, M_n$ lambda termi i x termska promenljiva. Ako $\Gamma \vdash (M[x := N])M_1 \ldots M_n : \sigma$ i N ima tip u Γ, tada*

$$\Gamma \vdash ((\lambda x.M)N)M_1 \ldots M_n : \sigma.$$

Dokaz. Indukcijom po n.

1. $n = 0$. Ovaj slučaj je Posledica 3.1.5.

2. $n \geq 1$. Pretpostavimo da $\Gamma \vdash (M[x := N])M_1 \ldots M_n : \sigma$ i da N ima tip u Γ. Na osnovu Tvrdjenja 2.3.7(3)

$$\Gamma \vdash M_n : \tau,\ \Gamma \vdash (M[x := N])M_1 \ldots M_{n-1} : \tau \to \sigma',\ \sigma' \leq \sigma.$$

Na osnovu indukcijske pretpostavke $\Gamma \vdash (\lambda x.M)NM_1 \ldots M_{n-1} : \tau \to \sigma'$ i $\sigma' \leq \sigma$. Dakle, $\Gamma \vdash (\lambda x.M)NM_1 \ldots M_n : \sigma'$, odnosno

$$\Gamma \vdash (\lambda x.M)NM_1 \ldots M_n : \sigma. \diamond$$

Teorema 3.1.12 *Svi termi sa osobinom jake normalizacije imaju tip u sistemima $\mathcal{D}$ i $\lambda\cap$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je M lambda term sa osobinom jake normalizacije. Obeležimo sa $n(M)$ sumu dužina svih mogućih redukcija terma M. Pošto M ima osobinu jake normalizacije, $n(M)$ je konačan broj. Dokaz je indukcijom po $n(M)$.

Svaki lambda term je oblika

$$M \equiv \lambda x_1 \dots x_m.VM_1 \dots M_n,$$

pri čemu je V promenljiva ili redeks. Samim tim, razlikujemo dva slučaja.

1. V je promenljiva, na primer y.
   Tada termi $M_1, \dots, M_n$ imaju osobinu jake normalizacije i $n(M) > n(M_i)$, $1 \leq i \leq n$. Na osnovu indukcijske pretpostavke, u sistemima $\mathcal{D}$ i $\lambda\cap$, $\Gamma_1 \vdash M_1 : \sigma_1, \dots, \Gamma_n \vdash M_n : \sigma_n$. Neka je $\Gamma = \biguplus \Gamma_i$. Tada $\Gamma \vdash M_1 : \sigma_1, \dots, \Gamma \vdash M_n : \sigma_n$. Pretpostavimo da su u bazi Γ promenljive $x_1, \dots, x_n, y$ deklarisane sa

$$x_1 : \tau_1, \dots, x_m : \tau_m, y : \tau,$$

   (ako je $y = x_i$ za neko $i \in \{1, \dots, n\}$, tada je $\tau \equiv \tau_i$). Neka je α nova tipska promenljiva i Γ' baza dobijena od baze Γ uzimajući da je $y : \tau'$ gde je

$$\tau' \equiv \tau \cap (\sigma_1 \to \dots \to \sigma_n \to \alpha).$$

   Tada $\Gamma' \vdash M_i : \sigma_i,\ (1 \leq i \leq n)$ i

$$\Gamma' \vdash yM_1 \dots M_n : \alpha.$$

   Dakle, M ima tip

$$\tau_1 \to \dots \to \tau_m \to \alpha$$

   (ako je $y \not\equiv x_1, \dots, x_m$) ili

$$\tau_1 \to \dots \to \tau_{i-1} \to \tau' \to \tau_{i+1} \to \dots \to \tau_m \to \alpha$$

   (ako je $y \equiv x_i$).

2. $V \equiv (\lambda x.P)Q$ (V je redeks).
   Tada
   $$M \equiv \lambda x_1 \ldots x_m.(\lambda x.P)QM_1, \ldots, M_n.$$
   Posmatrajmo term
   $$M' \equiv P[x := Q]M_1, \ldots, M_n.$$
   Očigledno, $n(M) > n(M')$ i $n(M) > n(Q)$. Dakle, na osnovu indukcijske pretpostavke M' i Q imaju tip u sistemima $\mathcal{D}$ i $\lambda\cap$. Pretpostavimo da u bazi Γ_1, M' ima tip σ, a u bazi Γ_2, Q ima tip τ, odnosno
   $$\Gamma_1 \vdash M' : \sigma \text{ i } \Gamma_2 \vdash Q : \tau.$$
   Neka je $\Gamma = \Gamma_1 \uplus \Gamma_2$, proizvod baza dat u Definiciji 2.3.3(4.). Tada $\Gamma \vdash M' : \sigma$ i $\Gamma \vdash Q : \tau$. Na osnovu Tvrdjenja 3.1.11 sledi da $(\lambda x.P)QM_1 \ldots M_n$ ima tip σ u Γ. Pretpostavimo da $x_1 : \tau_1, \ldots, x_m : \tau_m \in \Gamma$. Tada
   $$\Gamma \vdash M : \tau_1 \to \ldots \to \tau_m \to \sigma. \diamond$$

3.2 Jaka normalizacija

U ovom poglavlju ćemo utvrditi za koje od tipskih sistema sa presekom lambda termi koji imaju tip imaju osobinu jake normalizacije. Metod redukcije koji se koristi u ovom poglavlju je osnova za opšti postupak redukcije koji je proširen u sledećoj glavi, u Poglavlju 4.1. Ovaj metod je zasnovan na dokazu jake normalizacije za tipski sistem $\lambda\!\to$

Turing je dokazao da svi termi koji imaju tip u sistemu $\lambda\!\to$ imaju osobinu normalizacije. Metod redukcije, zasnovan na interpretaciji tipova, je uveden u Tait [36] da bi se dokazala osobina jake normalizacije za osnovni tipski sistem i dalje je razvijen u Girard [23] i Tait [37] da bi se dokazala osobina jake normalizacije za polimorfni lambda račun (lambda račun drugog reda). Pregled ovih dokaza dat je u Barendregt [3].

U Krivine [28] i kasnije u Ghilezan [18] metod redukcije je primenjen da bi se okarakterisali lambda termi sa osobinom jake normalizacije u tipskim sistemima sa presekom.

Podsetimo se da lambda term M ima osobinu normalizacije ako je bar jedna od njegovih redukcija konačna (strana 15). Lambda term ima osobinu jake normalizacije ako i samo ako su sve njegove redukcije konačne.

Zatim, uvedimo oznake date u Barendregt [3].

Skup svih lambda terma koji imaju osobinu jake normalizacije se obeležava sa $\mathcal{SN}$.

Definicija 3.2.1

$$\mathcal{SN} = \{M \in \Lambda \mid \neg(\exists M_1, M_2, \ldots \in \Lambda)\ M \to M_1 \to M_2 \to \ldots\}.$$

Definicija 3.2.2 *Ako su $A, B \subseteq \Lambda$, tada se skup $A \to B$ definiše kao podskup Λ na sledeći način:*

$$A \to B = \{M \in \Lambda \mid \forall N \in A \ \ MN \in B\}.$$

Zatim, definišimo *interpretaciju tipova* $[\![-]\!] : \texttt{type} \to \mathcal{P}(\Lambda)$.

Definicija 3.2.3 *1. $[\![\alpha]\!] = \mathcal{SN}$, ako je α tipska promenljiva;*

2. $[\![\varphi \cap \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \cap [\![\psi]\!]$;

3. $[\![\varphi \to \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \to [\![\psi]\!]$.

Lema 3.2.4 *1. $[\![\varphi]\!] \subseteq \mathcal{SN}$, za svaki tip φ;*

2. Ako $\varphi \le \psi$ onda $[\![\varphi]\!] \subseteq [\![\psi]\!]$.

Dalje, definišimo pojamo zasićenog skupa.

Definicija 3.2.5 *Skup $X \subseteq \Lambda$ je* zasićen *ako*

1. $(\forall n \ge 0)$ $(\forall M_1, \ldots, M_n \in \mathcal{SN})$ $xM_1 \ldots M_n \in X$, gde je x termska promenljiva;

2. $(\forall n \ge 0)$ $(\forall M_1, \ldots, M_n \in \mathcal{SN})$ $(\forall N \in \mathcal{SN})$

$$M[x := N]M_1 \ldots M_n \in X \Rightarrow (\lambda x.M)NM_1 \ldots M_n \in X.$$

Tvrdjenje 3.2.6 *1. $\mathcal{SN}$ je zasićen.*

2. Ako su A i B zasićeni skupovi, tada je i $A \to B$ zasićen skup.

3. Ako su A i B zasićeni skupovi, tada je i $A \cap B$ zasićen skup.

4. $[\![\varphi]\!]$ *je zasićen skup za svako* $\varphi \in \mathtt{type}$.

Ako je $\rho : \mathtt{var} \to \Lambda$ valuacija termskih promenljivih u Λ, tada se *valuacija terma* $[\![-]\!]_\rho : \Lambda \to \Lambda$ definiše na sledeći način.

Definicija 3.2.7 1. $[\![x]\!]_\rho = \rho(x)$, *za sve termske promenljive* x;

2. $[\![M]\!]_\rho = M[x_1 := \rho(x_1), \ldots, x_n := \rho(x_n)]$, *gde* $Fv(M) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

U sledećoj definiciji je data relacija $\models$ koja povezuje interpretaciju tipova i valuaciju terma.

Definicija 3.2.8 1. $\rho \models M : \varphi$ *ako i samo ako* $[\![M]\!]_\rho \in [\![\varphi]\!]$;

2. $\rho \models \Gamma$ *ako i samo ako* $(\forall (x : \varphi) \in \Gamma) \quad \rho \models x : \varphi$;

3. $\Gamma \models M : \sigma$ *ako i samo ako* $(\forall \rho \models \Gamma) \quad \rho \models M : \sigma$.

Sada smo u mogućnosti da damo dokaz valjanosti za tipske sisteme $\mathcal{D}$ i $\lambda\cap$. Ovaj dokaza je proširenje dokaza valjanosti za tipski sistem $\lambda\!\!\to$ dat u Barendregt [3].

Tvrdjenje 3.2.9 *(Valjanost za* $\mathcal{D}$ *i* $\lambda\cap$*)*

1.
$$\textit{Ako } \Gamma \vdash_{\mathcal{D}} Q : \varphi, \textit{ onda } \Gamma \models Q : \varphi;$$

2.
$$\textit{Ako } \Gamma \vdash_{\lambda\cap} Q : \varphi, \textit{ onda } \Gamma \models Q : \varphi.$$

Dokaz. Tvrdjenje ćemo dokazati samo za tipski sistem $\lambda\cap$. Tvrdjenje tada očigledno važi i za sistem $\mathcal{D}$ s obzirom da u ovom sistemu samo nedostaje pravilo $(\leq)$.

Dokaz je indukcijom po izvodjenju $\Gamma \vdash Q : \varphi$.

Slučaj 1. Poslednje primenjeno pravilo je (ax), odnosno
$$\Gamma, x : \varphi \vdash x : \varphi.$$

Na osnovu Tvrdjenja 3.2.6 sledi da $x \in [\![\varphi]\!]$, za sve $x : \varphi \in \Gamma$. Na osnovu Definicije 3.2.7 $\rho \models x : \varphi$, za sve $x : \varphi \in \Gamma$, što znači da $\rho \models \Gamma$. Kako ovo važi za svako ρ, dobijamo da $\Gamma, x : \varphi \models x : \varphi$.

Slučaj 2. Poslednje primenjeno pravilo je $(\to E)$, odnosno

$$\Gamma \vdash M : \tau \to \varphi,\ \Gamma \vdash N : \tau \ \Rightarrow\ \Gamma \vdash MN : \varphi.$$

Na osnovu indukcijske pretpostavke $\Gamma \models M : \tau \to \varphi$ i $\Gamma \models N : \tau$.
Neka $\rho \models \Gamma$. Tada $[\![M]\!]_\rho \in [\![\tau \to \varphi]\!] = [\![\tau]\!] \to [\![\varphi]\!]$ i $[\![N]\!]_\rho \in [\![\tau]\!]$. Dakle,

$$[\![MN]\!]_\rho = [\![M]\!]_\rho [\![N]\!]_\rho \in [\![\varphi]\!].$$

Slučaj 3. Poslednje primenjeno pravilo je $(\to I)$, odnosno

$$\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau \ \Rightarrow\ \Gamma \vdash \lambda x.M : \sigma \to \tau.$$

Na osnovu indukcijske pretpostavke $\Gamma, x : \sigma \models M : \tau$.
Neka $\rho \models \Gamma$ i uzmimo proizvoljno $N \in [\![\sigma]\!]$. Treba pokazati da

$$[\![\lambda x.M]\!]_\rho N \in [\![\tau]\!].$$

Možemo konstruisati novu valuaciju

$$\rho'(x) = \begin{cases} N, & y = x \\ \rho(y), & y \neq x \end{cases}$$

Tada $\rho' \models \Gamma, x : \sigma$ jer $\rho'(x) = N \in [\![\sigma]\!]$. Na osnovu indukcijske pretpostavke $\rho' \models M : \tau$ odnosno, $[\![M]\!]_{\rho'} \in [\![\tau]\!]$. Primetimo da važi sledeće

$$[\![\lambda x.M]\!]_{\rho'} N = [\![\lambda x.M]\!]_{\rho'} \rho'(x) = [\![\lambda x.M]\!]_{\rho'} [\![x]\!]_{\rho'} = [\![(\lambda x.M)x]\!]_{\rho'} \underset{\beta}{\to} [\![M]\!]_{\rho'}.$$

Na osnovu Tvrdjenja 3.2.6(4) $[\![\tau]\!]$ je zasićen, tako da iz $[\![M]\!]_{\rho'} = M[x_1 := \rho(x_1), \ldots, x_n := \rho(x_n), x := N] \in [\![\tau]\!]$ dobijamo $(\lambda x.M[x_1 := \rho(x_1), \ldots, x_n := \rho(x_n)])N \in [\![\tau]\!]$, odnosno $(\lambda x.[\![M]\!]_\rho)N \in [\![\tau]\!]$. Prema tome

$$[\![\lambda x.M]\!]_\rho N \in [\![\tau]\!],$$

što je i trebalo pokazati.

Slučaj 4. Poslednje primenjeno pravilo je $(\cap E)$, odnosno

$$\Gamma \vdash M : \sigma \cap \tau \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash M : \sigma,\ \Gamma \vdash M : \tau.$$

Na osnovu indukcijske pretpostavke $\Gamma \models M : \sigma \cap \tau$.
Ako $\rho \models \Gamma$, tada $[\![M]\!]_\rho \in [\![\sigma \cap \tau]\!] = [\![\sigma]\!] \cap [\![\tau]\!]$. Dakle,

$$[\![M]\!]_\rho \in [\![\sigma]\!] \text{ i } [\![M]\!]_\rho \in [\![\tau]\!],$$

što znači da

$$\Gamma \models M : \sigma \text{ i } \Gamma \models M : \tau.$$

Slučaj 5. Poslednje primenjeno pravilo je $(\cap I)$, odnosno

$$\Gamma \vdash M : \sigma,\ \Gamma \vdash M : \tau \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash M : \sigma \cap \tau.$$

Na osnovu indukcijske pretpostavke $\Gamma \models M : \sigma$ i $\Gamma \models M : \tau$.
Ako $\rho \models \Gamma$, tada $[\![M]\!]_\rho \in [\![\sigma]\!]$ i $[\![M]\!]_\rho \in [\![\tau]\!]$. Odavde sledi da

$$[\![M]\!]_\rho \in [\![\sigma]\!] \cap [\![\tau]\!] = [\![\sigma \cap \tau]\!],$$

što znači da

$$\Gamma \models M : \sigma \cap \tau.$$

Slučaj 6. Poslednje primenjeno pravilo je $(\leq)$, odnosno

$$\Gamma \vdash M : \sigma,\ \sigma \leq \tau \Rightarrow \Gamma \vdash M : \tau.$$

Na osnovu indukcijske pretpostavke $\Gamma \models M : \sigma$.
Ako $\rho \models \Gamma$, tada $[\![M]\!]_\rho \in [\![\sigma]\!]$. Na osnovu Leme 3.2.4(2.) $[\![\sigma]\!] \subseteq [\![\tau]\!]$ tako da dobijamo

$$[\![M]\!]_\rho \in [\![\tau]\!], \text{ odnosno } \Gamma \models M : \tau. \diamond$$

Kao neposrednu posledicu valjanosti dobijamo teoremu o jakoj normalizaciji.

Teorema 3.2.10 *(Jaka normalizacija za $\mathcal{D}$ i $\lambda\cap$)*

1.

Ako $\Gamma \vdash_{\mathcal{D}} M : \varphi$, *onda* M *ima osobinu jake normalizacije.*

2.

$$\textit{Ako } \Gamma \vdash_{\lambda\cap} M : \varphi, \textit{ onda } M \textit{ ima osobinu jake normalizacije.}$$

Dokaz. Iz istih razloga kao u prethodnoj teoremi, dokazaćemo tvrdjenje samo za sistem $\lambda\cap$.

Pretpostavimo da $\Gamma \vdash M : \varphi$. Tada $\Gamma \models M : \varphi$ na osnovu Tvrdjenja 3.2.9. Dakle, za svako ρ imamo da

$$\rho \models \Gamma \;\Rightarrow\; [\![M]\!]_\rho \in [\![\varphi]\!].$$

Uzmimo ρ takvo da

$$\rho(y) \equiv y \text{ za svako } y \in \mathtt{var}.$$

Za svako $(x : \sigma) \in \Gamma$ važi da $\rho \models x : \sigma$ jer $x \in [\![\sigma]\!]$ na osnovu Definicije 3.2.5(1). Dakle, $\rho \models \Gamma$ pa samim tim $\rho \models M : \varphi$, što znači da

$$M = [\![M]\!]_\rho \in [\![\varphi]\!].$$

Na osnovu Leme 3.2.4(2) sledi da

$$[\![\varphi]\!] \subseteq \mathcal{SN}. \diamond$$

Glava 4

Opšti postupak redukcije

Osnovna ideja metoda redukcije je interpretacija tipova pomoću odgovarajućih skupova lambda terma koji zadovoljavaju odredjene osobine.

Osim primene na dokaz jake normalizacije za različite tipske sisteme date u Poglavlju 3.2, metod redukcije je korišćen za dokazivanje raznih drugih osobina lambda terma koji imaju tip.

U Mitchell [31] i [32] metod redukcije je posmatran kao logičke relacije. Pokazano je da, osim za dokaz jake normalizacije, ovaj metod može da se koristi i za dokaz konfluencije (Church-Rosser-ove osobine) i nekih drugih osobina lambda terma u osnovnom tipskom sistemu. Originalan dokaz Church-Rosser-ove osobine za osnovni tipski sistem korišćenjem logičkih relacija i metoda redukcije je dat u Statman [35] i Koletsos [26].

Metod redukcije je takodje upotrebljen u Gallier [16] za karakterizaciju nekih specijalnih klasa lambda terma, kao što su termi sa osobinom jake normalizacije, termi koji imaju normalnu formu, termi koji imaju početnu normalnu formu i termi koji imaju slabu početnu normalnu formu, njihovom tipizacijom u lambda računu sa tipovima sa presekom. U Dezani i dr. [15] i [13] metod redukcije je primenjen da bi se okarakterisali spomenuti termi i njihove perzistentne verzije.

U ovom delu ćemo prikazati opšti postupak redukcije kao osnovu za dokaze različitih redukcijskih osobina lambda terma koji imaju tip u osnovnom tipskom sistemu $\lambda\rightarrow$ i u tipskim sistemima sa presekom $\lambda\cap$ i $\lambda\cap\Omega$. Ovaj opšti postupak redukcije je zapravo ekstenzija metoda redukcije koji smo do sada koristili jer objedinjuje sve do sada spomenute dokaze i može se takodje primeniti, kao što će biti pokazano, i na neke druge osobine.

Ova Glava je podeljena u sledeće celine. U Poglavlju 4.1 je pokazan opšti postupak redukcije. Kompletan metod je primenjen u Poglavlju 4.2 da bi dokazali postojanje normalne forme (4.2.1), jedinstvenost normalne forme (4.2.2), konačnost redukcije sa leve strane (4.2.3) i osobinu jake normalizacije (4.2.4) u sistemu $\lambda\cap$. Prvi deo postupka je u Poglavlju 4.3 primenjen u dokazu konfluencije $\beta\eta$-redukcije (4.3.1) i jedinstvenost $\beta\eta$-normalne forme (4.3.2) u sistemu $\lambda\cap$. Drugi deo postupka je u Poglavlju 4.4 primenjen na dokaz konfluencije β-redukcije (4.4.1), standardizacije (4.4.2) i konačnost razvoja (4.4.3) u sistemu $\lambda\cap\Omega$ i u celom skupu Λ.

4.1 Postupak redukcije za tipske sisteme sa presekom

Osnovna ideja opšteg postupka redukcije je interpretacija tipova odgovarajućim skupovima (zasićenim i stabilnim skupovima u Tait [36] i Krivine [28] i dopuštenim relacijama u Mitchell [31] i [32]) lambda terma koji zadovoljavaju odredjene osobine (na primer, osobinu jake normalizacije, konfluenciju). Zatim se razvija semantika da bi se dobila valjanost dodeljivanja tipova. Posledica valjanosti, činjenica da svaki term koji ima tip pripada interpretaciji tog tipa, dovodi nas do toga da termi koji imaju tip u datom sistemu zadovoljavaju odredjenu osobinu, jer su na taj način definisane interpretacije tipova.

Razlikujemo dve različite vrste interpretacije tipova u odnosu na dati skup $\mathcal{P} \subseteq \Lambda$ u odsustvu η-konverzije. Takodje, razlikujemo dve različite vrste uslova koje dati skup $\mathcal{P} \subseteq \Lambda$ mora da zadovoljava. Kombinujući različite interpretacije tipova sa odgovarajućim uslovima koje zadovoljava skup $\mathcal{P} \subseteq \Lambda$ razvija se semantika i može se pokazati valjanost u oba slučaja.

Da bismo dalje razradili opšti postupak redukcije, posmatraćemo Λ kao *aplikativnu strukturu* čiji domen su lambda termi i gde pod aplikacijom podrazumevamo aplikaciju terma.

U ovom delu, koristićemo malo izmenjene oznake za skup tipova.

Definicija 4.1.1 *Skupovi* $\mathtt{type}$ *i* $\mathtt{type}^{\omega}$ *tipova se definišu na sledeći način.*

$$\begin{array}{|rcl|}\hline \mathtt{type} & ::= & \mathtt{atom} \mid \mathtt{type} \to \mathtt{type} \mid \mathtt{type} \cap \mathtt{type} \\ \mathtt{type}^\omega & ::= & \mathtt{atom} \mid \omega \mid \mathtt{type}^\omega \to \mathtt{type}^\omega \mid \mathtt{type}^\omega \cap \mathtt{type}^\omega \\ \mathtt{atom} & ::= & \alpha \mid \mathtt{atom}' \\ \hline \end{array}$$

Definicija 4.1.2 *Neka su $A, B \subseteq \Lambda$. Tada*

$$A \to B = \{M \in \Lambda \mid \forall N \in A \quad MN \in B\}.$$

Definišimo zatim *interpretacije tipova* u odnosu na dati podskup $\mathcal{P} \subseteq \Lambda$ na sledeći način.

Definicija 4.1.3 *Neka je $\mathcal{P} \subseteq \Lambda$ i $\mathcal{Q} \in \{\mathcal{P},\ \Lambda\}$.*

(i) Interpretacija tipova $[\![-]\!] : \mathtt{type} \to 2^\Lambda$ se definiše na sledeći način:

(I1) $[\![\alpha]\!] = \mathcal{P}$, *za sve tipske promenljive* α;

(I2) $[\![\sigma \cap \tau]\!] = [\![\sigma]\!] \cap [\![\tau]\!]$;

(I3) $[\![\sigma \to \tau]\!] = ([\![\sigma]\!] \to [\![\tau]\!]) \cap \mathcal{Q} =$
$= \{M \in \mathcal{Q} \mid \forall N \in [\![\sigma]\!] \quad MN \in [\![\tau]\!]\}$.

(ii) Ako je $\mathcal{Q} = \Lambda$, tada se interpretacija tipova označava sa $[\![-]\!]$. Ako je $\mathcal{Q} = \mathcal{P}$, tada se interpretacija tipova označava sa $[\![-]\!]_\mathcal{P}$.

(iii) ω-interpretacija tipova $[\![-]\!]^\omega : \mathtt{type}^\omega \to 2^\Lambda$ se definiše na sledeći način:

(Ω1) $[\![\alpha]\!]^\omega = \mathcal{P}$, *za sve tipske promenljive* α;

(Ω2) $[\![\sigma \cap \tau]\!]^\omega = [\![\sigma]\!]^\omega \cap [\![\tau]\!]^\omega$;

(Ω3) $[\![\sigma \to \tau]\!]^\omega = ([\![\sigma]\!]^\omega \to [\![\tau]\!]^\omega) \cap \mathcal{P} =$
$= \{M \in \mathcal{P} \mid \forall N \in [\![\sigma]\!]^\omega \quad MN \in [\![\tau]\!]^\omega\}$;

(Ω4) $[\![\omega]\!]^\omega = \Lambda$.

Lako se pokazuje sledeća lema.

Lema 4.1.4 *(i) Za dato $\varphi \in \mathtt{type}$ važi da $[\![\varphi]\!]_\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}$.*

(ii) Za svaki tip $\varphi \in \mathtt{type}^\omega$ ($\varphi \not\sim \omega$) važi da $[\![\varphi]\!]^\omega \subseteq \mathcal{P}$.

Dokaz.

(i) Indukcijom po konstrukciji φ.

Slučaj $\varphi \equiv \alpha$ je tipska promenljiva. Kako je $[\![\alpha]\!]_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$, tvrdjenje sledi na osnovu pretpostavke.

Slučaj $\varphi \equiv \tau \to \rho$. Tada je $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{P}} = ([\![\tau]\!]_{\mathcal{P}} \to [\![\rho]\!]_{\mathcal{P}}) \cap \mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}$.

Slučaj $\varphi \equiv \tau \cap \rho$. Na osnovu indukcijske pretpostavke je $[\![\tau]\!]_{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{P}$ i $[\![\rho]\!]_{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{P}$. Samim tim je $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{P}} = [\![\tau]\!]_{\mathcal{P}} \cap [\![\rho]\!]_{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{P}$.

(ii) Dokaz je analogan kao u slučaju (i) jer slučaj $\varphi = \omega$ moramo isključiti iz razmatranja. $\diamond$

Dalje, definišimo *valuaciju terma* $[\![-]\!]_\rho : \Lambda \to \Lambda$ i relacije semantičke zadovoljivosti $\models$ i $\models_{\mathcal{P}}$ koje povezuju interpretacije tipova i valuaciju terma.

U daljem tekstu, izrazi oblika $[\![-]\!]^{(\omega)}_{(\mathcal{P})}$ će biti interpretirani kao $[\![-]\!]$, $[\![-]\!]_{\mathcal{P}}$ i $[\![-]\!]^{\omega}$. Slično za $\models^{(\omega)}_{(\mathcal{P})}$, (ω)-interpretaciju tipova, $\leq^{(\omega)}$, i $\mathtt{type}^{(\omega)}$.

Definicija 4.1.5 *Neka je* $\rho : \mathtt{var} \to \Lambda$ *valuacija tipskih promenljivih u* Λ. *Tada se* $[\![-]\!]_\rho : \Lambda \to \Lambda$ *definiše na sledeći način:*

$$M[x_1 := \rho(x_1), \ldots, x_n := \rho(x_n)], \quad \textit{gde je } Fv(M) = \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Ekstenzija $\rho(x := N)$ valuacije ρ znači da je

$$\rho(x := N)(x) = N \text{ i}$$

$$\rho(x := N)(y) = y, \text{ ako je } y \not\equiv x.$$

Važi sledeća lema.

Lema 4.1.6 $[\![M]\!]_{\rho(x:=N)} = [\![M]\!]_{\rho(x:=x)}[x := N]$.

Dokaz.
Indukcijom po konstrukciji $[\![M]\!]_{\rho(x:=N)}$.

Slučaj $M = x$. Tada je

$$[\![M]\!]_{\rho(x:=N)} = [\![x]\!]_{\rho(x:=N)} = \rho(x := N)(x) = N =$$

$$= \rho(x := x)(x)[x := N] = [\![x]\!]_{\rho(x:=x)}[x := N].$$

Slučaj $M = PQ$. Tada je

$$[\![M]\!]_{\rho(x:=N)} = [\![PQ]\!]_{\rho(x:=N)} = [\![P]\!]_{\rho(x:=N)}[\![Q]\!]_{\rho(x:=N)} =$$

$$= [\![P]\!]_{\rho(x:=x)}[x:=N][\![Q]\!]_{\rho(x:=x)}[x:=N] = [\![PQ]\!]_{\rho(x:=x)}[x:=N].$$

Slučaj $M = \lambda y.P$. Na osnovu konvencije o promenljivim možemo pretpostaviti da je $y \neq x$. Tada je

$$[\![M]\!]_{\rho(x:=N)} = (\lambda y.P)[x_1 := S_1, \ldots, x_n := S_n, x := N] =$$

$$= \lambda y.P[x_1 := S_1, \ldots, x_n := S_n, x := N] = \lambda y.P_{\rho(x:=x)}[x:=N] =$$

$$= (\lambda y.P)_{\rho(x:=x)}[x:=N]. \diamond$$

Definicija 4.1.7 *Neka* $[\![-]\!]^{(\omega)}_{(\mathcal{P})} : \mathtt{type} \to 2^{\Lambda}$ *i neka je* $\rho : \mathtt{var} \to \Lambda$ *valuacija promenljivih u* Λ. *Tada*

1. ρ *zadovoljava* M, *u oznaci* $\rho \models^{(\omega)}_{(\mathcal{P})} M : \varphi$ *ako i samo ako*

$$[\![M]\!]_{\rho} \in [\![\varphi]\!]^{(\omega)}_{(\mathcal{P})};$$

2. ρ *zadovoljava bazu* Γ, *u oznaci* $\rho \models^{(\omega)}_{(\mathcal{P})} \Gamma$ *ako i samo ako*

$$(\forall (x : \varphi) \in \Gamma) \quad \rho(x) \in [\![\varphi]\!]^{(\omega)}_{(\mathcal{P})};$$

3. *Baza* Γ *zadovoljava* M, *u oznaci* $\Gamma \models^{(\omega)}_{(\mathcal{P})} M : \varphi$ *ako i samo ako*

$$(\forall \rho \models^{(\omega)}_{(\mathcal{P})} \Gamma) \quad \rho \models^{(\omega)}_{(\mathcal{P})} M : \varphi.$$

Razmotrimo sada sledeće uslove za skup $\mathcal{P} \subseteq \Lambda$.

Definicija 4.1.8 *Neka je dat skup* $\mathcal{P} \subseteq \Lambda$. *Tada:*

1. $\mathcal{P}$ *zadovoljava* $VAR(\mathcal{P})$ *ako*

$$(\forall \varphi \in \mathtt{type}^{(\omega)})(\forall x \in \mathtt{var}) \;\; x \in [\![\varphi]\!]^{(\omega)}_{(\mathcal{P})};$$

2. *$\mathcal{P}$ je zasićen, u oznaci SAT($\mathcal{P}$) ako*

$$(\forall \varphi \in \mathtt{type}^{(\omega)})(\forall N \in \mathcal{P}) \;\; M[x := N] \in [\![\varphi]\!]^{(\omega)}_{(\mathcal{P})} \quad \Rightarrow \quad (\lambda x.M)N \in [\![\varphi]\!]^{(\omega)}_{(\mathcal{P})};$$

3. *$\mathcal{P}$ zadovoljava CLO($\mathcal{P}$) ako*

$$M \in \mathcal{P} \quad \Rightarrow \quad \lambda x.M \in \mathcal{P};$$

4. *$\mathcal{P}$ zadovoljava CLO$^+$($\mathcal{P}$) ako*

$$Mx \in \mathcal{P} \quad \Rightarrow \quad M \in \mathcal{P}.$$

Zapravo, osobine (*CLO*) i (*CLO$^+$*) su povezane na sledeći način, kao što je primećeno u Koletsos i Stavrinos [27].

Napomena 4.1.9 *1. CLO$^+$($\mathcal{P}$) i SAT($\mathcal{P}$) $\Rightarrow$ CLO($\mathcal{P}$).*
Ako $M \in \mathcal{P}$, tada $(\lambda x.M)x \twoheadrightarrow M[x := x] \equiv M$. Dakle, na osnovu SAT($\mathcal{P}$) sledi da $(\lambda x.M)x \in \mathcal{P}$, a na osnovu CLO$^+$($\mathcal{P}$) sledi da $\lambda x.M \in \mathcal{P}$.

2. CLO($\mathcal{P}$) i η-jednakost $\Rightarrow$ CLO$^+$($\mathcal{P}$).
Ako $Mx \in \mathcal{P}$ ($x \notin Fv(M)$), tada na osnovu CLO($\mathcal{P}$) sledi da $\lambda x.Mx \in \mathcal{P}$. Pošto je $\lambda x.Mx =_\eta M$, dobijamo da $M \in \mathcal{P}$.

Zbog toga je u odsustvu η-jednakosti moguće razlikovati ova dva uslova.

Relacija poretka u skupu tipova se interpretira kao skupovna inkluzija.

Lema 4.1.10 *Ako $\tau \leq^{(\omega)} \sigma$, onda $[\![\tau]\!]^{(\omega)}_{(\mathcal{P})} \subseteq [\![\sigma]\!]^{(\omega)}_{(\mathcal{P})}$.*

Dokaz. Indukcijom po dužini izvodjenja $\tau \leq^{(\omega)} \sigma$. Dovoljno je pokazati da tvrdjenje važi za ($\omega-$)interpretaciju tipova.

1. $\tau \leq^{(\omega)} \tau$, tada očigledno $[\![\tau]\!]^{(\omega)} \subseteq [\![\tau]\!]^{(\omega)}$.

2. $\tau \leq^{(\omega)} \sigma,\ \sigma \leq^{(\omega)} \rho \ \Rightarrow \tau \leq^{(\omega)} \rho$.
   Na osnovu indukcijske pretpostavke je $[\![\tau]\!]^{(\omega)} \subseteq [\![\sigma]\!]^{(\omega)}$ i $[\![\sigma]\!]^{(\omega)} \subseteq [\![\rho]\!]^{(\omega)}$.
   Zbog tranzitivnosti operacije $\subseteq$ sledi da $[\![\tau]\!]^{(\omega)} \subseteq [\![\rho]\!]^{(\omega)}$.

3. $(\tau \to \sigma) \cap (\tau \to \rho) \leq^{(\omega)} \tau \to (\sigma \cap \rho)$.
   Treba pokazati da
   $$([\![\tau]\!]^{(\omega)} \to [\![\sigma]\!]^{(\omega)}) \cap ([\![\tau]\!]^{(\omega)} \to [\![\rho]\!]^{(\omega)}) \subseteq [\![\tau]\!]^{(\omega)} \to ([\![\sigma]\!]^{(\omega)} \cap [\![\rho]\!]^{(\omega)}).$$
   Pretpostavimo da $M \in ([\![\tau]\!]^{(\omega)} \to [\![\sigma]\!]^{(\omega)}) \cap ([\![\tau]\!]^{(\omega)} \to [\![\rho]\!]^{(\omega)})$. Tada
   $$M \in [\![\tau]\!]^{(\omega)} \to [\![\sigma]\!]^{(\omega)} \Leftrightarrow \forall N \in [\![\tau]\!]^{(\omega)},\ MN \in [\![\sigma]\!]^{(\omega)},$$
   $$M \in [\![\tau]\!]^{(\omega)} \to [\![\rho]\!]^{(\omega)} \Leftrightarrow \forall N \in [\![\tau]\!]^{(\omega)},\ MN \in [\![\rho]\!]^{(\omega)}.$$
   Dakle, $\forall N \in [\![\tau]\!]^{(\omega)},\ MN \in [\![\sigma]\!]^{(\omega)} \cap [\![\rho]\!]^{(\omega)} \Leftrightarrow M \in [\![\tau]\!]^{(\omega)} \to ([\![\sigma]\!]^{(\omega)} \cap [\![\rho]\!]^{(\omega)})$.

4. $\tau \cap \sigma \leq^{(\omega)} \tau\ (\sigma)$.
   Tada je $[\![\tau]\!]^{(\omega)} \cap [\![\sigma]\!]^{(\omega)} \subseteq [\![\tau]\!]^{(\omega)}\ ([\![\sigma]\!]^{(\omega)})$ na osnovu osobina operacija $\cap$ i $\subseteq$.

5. $\tau \leq^{(\omega)} \sigma,\ \tau \leq^{(\omega)} \rho \Rightarrow \tau \leq^{(\omega)} \sigma \cap \rho$.
   Na osnovu indukcijske pretpostavke je $[\![\tau]\!]^{(\omega)} \subseteq [\![\sigma]\!]^{(\omega)}$ i $[\![\tau]\!]^{(\omega)} \subseteq [\![\rho]\!]^{(\omega)}$, pa je
   $$[\![\tau]\!]^{(\omega)} \subseteq [\![\sigma]\!]^{(\omega)} \cap [\![\rho]\!]^{(\omega)}.$$

6. $\tau \leq^{(\omega)} \tau_1,\ \sigma \leq^{(\omega)} \sigma_1 \Rightarrow \tau_1 \to \sigma \leq^{(\omega)} \tau \to \sigma_1$.
   Na osnovu indukcijske pretpostavke je $[\![\tau]\!]^{(\omega)} \subseteq [\![\tau_1]\!]^{(\omega)}$ i $[\![\sigma]\!]^{(\omega)} \subseteq [\![\sigma_1]\!]^{(\omega)}$.
   Potrebno je pokazati da
   $$[\![\tau_1]\!]^{(\omega)} \to [\![\sigma]\!]^{(\omega)} \subseteq [\![\tau]\!]^{(\omega)} \to [\![\sigma_1]\!]^{(\omega)}.$$
   Neka $M \in [\![\tau_1]\!]^{(\omega)} \to [\![\sigma]\!]^{(\omega)} \Leftrightarrow \forall N \in [\![\tau_1]\!]^{(\omega)},\ MN \in [\![\sigma]\!]^{(\omega)}$.
   Ali $[\![\sigma]\!]^{(\omega)} \subseteq [\![\sigma_1]\!]^{(\omega)}$ tako da dobijamo da
   $$\forall N \in [\![\tau_1]\!]^{(\omega)},\ MN \in [\![\sigma_1]\!]^{(\omega)}.$$
   Takodje, $[\![\tau]\!]^{(\omega)} \subseteq [\![\tau_1]\!]^{(\omega)}$ tako da
   $$\forall N \in [\![\tau]\!]^{(\omega)},\ MN \in [\![\sigma_1]\!]^{(\omega)} \Leftrightarrow M \in [\![\tau]\!]^{(\omega)} \to [\![\sigma_1]\!]^{(\omega)}.$$

7. $\sigma \leq^{\omega} \omega$.
   Tada je trivijalno $[\![\sigma]\!]^{\omega} \subseteq \Lambda$.

8. $\sigma \to \omega \leq^{\omega} \omega \to \omega$.
   Neka

$$M \in ([\![\sigma]\!]^{\omega} \to [\![\omega]\!]^{\omega}) \cap \mathcal{P} \Leftrightarrow M \in \mathcal{P} \wedge (\forall N \in [\![\sigma]\!]^{\omega}) MN \in [\![\omega]\!]^{\omega} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M \in \mathcal{P} \wedge (\forall N \in [\![\sigma]\!]^{\omega}) MN \in \Lambda.$$

   Ali za svaki lambda term M trivijalno važi

$$(\forall N \in \Lambda)\ MN \in \Lambda \Leftrightarrow (\forall N \in [\![\omega]\!]^{\omega})\ MN \in [\![\omega]\!]^{\omega} \Leftrightarrow M \in [\![\omega]\!]^{\omega} \to [\![\omega]\!]^{\omega}. \diamond$$

Nakon što smo uveli osnovne pojmove i definicije, možemo da dokažemo *valjanost*. Preciznije, u mogućnosti smo da dokažemo valjanost u odnosu na sve tri interpretacije tipova: $[\![\ ]\!]$, $[\![\ ]\!]_{\mathcal{P}}$ i $[\![\ ]\!]^{\omega}$.

Tvrdjenje 4.1.11 (Valjanost u odnosu na $[\![\ ]\!]$) *Neka je dat skup $\mathcal{P} \subseteq \Lambda$ takav da važi $\mathcal{SN} \subseteq \mathcal{P}$ i $SAT(\mathcal{P})$. Tada*

$$\Gamma \vdash Q : \varphi \Rightarrow \Gamma \models Q : \varphi,$$

Dokaz. Indukcijom po izvodjenju $\Gamma \vdash Q : \varphi$.

Slučaj 1. Poslednje primenjeno pravilo je (ax), odnosno

$$\Gamma, x : \varphi \vdash x : \varphi.$$

Tada očigledno $\Gamma, x : \varphi \models x : \varphi$, na osnovu Definicija 4.1.5 i 4.1.7.

Slučaj 2. Poslednje primenjeno pravilo je $(\to E)$, odnosno

$$\Gamma \vdash M : \tau \to \varphi, \Gamma \vdash N : \tau \Rightarrow \Gamma \vdash MN : \varphi.$$

Na osnovu indukcijske pretpostavke sledi da $\Gamma \models M : \tau \to \varphi$ i $\Gamma \models N : \tau$. Neka $\rho \models \Gamma$. Tada $[\![M]\!]_{\rho} \in [\![\tau \to \varphi]\!] = [\![\tau]\!] \to [\![\varphi]\!]$ i $[\![N]\!]_{\rho} \in [\![\tau]\!]$, pa dobijamo da

$$[\![MN]\!]_{\rho} = [\![M]\!]_{\rho}[\![N]\!]_{\rho} \in [\![\varphi]\!].$$

Slučaj 3. Poslednje primenjeno pravilo je $(\to I)$, odnosno

$$\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau \Rightarrow \Gamma \vdash \lambda x.M : \sigma \to \tau.$$

Na osnovu indukcijske pretpostavke $\Gamma, x : \sigma \models M : \tau$. Neka $\rho \models \Gamma$ i neka $N \in [\![\sigma]\!]$. Tada $\rho(x := N) \models \Gamma$ pošto $x \notin Dom\,\Gamma$ i $\rho(x := N) \models x : \sigma$ jer $N \in [\![\sigma]\!]$. Dakle, $\rho(x := N) \models M : \tau$, odnosno $[\![M]\!]_{\rho(x := N)} \in [\![\tau]\!]$. Na osnovu Definicije 4.1.5 $[\![M]\!]_{\rho(x := N)} = M[x_1 := S_1, \ldots, x_n := S_n, x := N] \in [\![\tau]\!]$. Na osnovu $SAT(\mathcal{P})$ dobijamo da $(\lambda x.M[x_1 := S_1, \ldots, x_n := S_n])N \in [\![\tau]\!]$. Kako za ovu valuaciju ρ važi $(\lambda x.M[x_1 := S_1, \ldots, x_n := S_n])N = [\![\lambda x.M]\!]_\rho N$, dobijamo da $[\![\lambda x.M]\!]_\rho N \in [\![\tau]\!]$. Zaključujemo da $[\![\lambda x.M]\!]_\rho \in [\![\sigma]\!] \to [\![\tau]\!]$ pošto je $N \in [\![\sigma]\!]$ bilo proizvoljno.

Slučaj 4. Poslednje primenjeno pravilo je $(\cap E)$, odnosno

$$\Gamma \vdash M : \sigma \cap \tau \Rightarrow \Gamma \vdash M : \sigma,\ \Gamma \vdash M : \tau.$$

Na osnovu indukcijske pretpostavke $\Gamma \models M : \sigma \cap \tau$. Neka $\rho \models \Gamma$. Tada $[\![M]\!]_\rho \in [\![\sigma \cap \tau]\!] = [\![\sigma]\!] \cap [\![\tau]\!]$. Dakle

$$[\![M]\!]_\rho \in [\![\sigma]\!] \text{ i } [\![M]\!]_\rho \in [\![\tau]\!],$$

odnosno

$$\Gamma \models M : \sigma \text{ i } \Gamma \models M : \tau.$$

Slučaj 5. Poslednje primenjeno pravilo je $(\cap I)$, odnosno

$$\Gamma \vdash M : \sigma,\ \Gamma \vdash M : \tau \Rightarrow \Gamma \vdash M : \sigma \cap \tau.$$

Na osnovu indukcijske pretpostavke sledi da $\Gamma \models M : \sigma$ i $\Gamma \models M : \tau$. Neka $\rho \models \Gamma$. Tada $[\![M]\!]_\rho \in [\![\sigma]\!]$ i $[\![M]\!]_\rho \in [\![\tau]\!]$. Znači da

$$[\![M]\!]_\rho \in [\![\sigma \cap \tau]\!],$$

odnosno

$$\Gamma \models M : \sigma \cap \tau.$$

Slučaj 6. Poslednje primenjeno pravilo je $(\leq)$, odnosno

$$\Gamma \vdash M : \sigma,\ \sigma \leq \tau \Rightarrow \Gamma \vdash M : \tau.$$

Na osnovu indukcijske pretpostavke $\Gamma \models M : \sigma$. Neka $\rho \models \Gamma$. Tada $[\![M]\!]_\rho \in [\![\sigma]\!]$. Na osnovu Leme 4.1.10 je $[\![\sigma]\!] \subseteq [\![\tau]\!]$. Dakle,

$$[\![M]\!]_\rho \in [\![\tau]\!],\ \text{odnosno } \Gamma \models M : \tau. \diamond$$

Neposredna posledica valjanosti je sledeća osobina.

Tvrdjenje 4.1.12 *Neka je $\mathcal{SN} \subseteq \mathcal{P}$ i neka $\mathcal{P}$ zadovoljava $VAR(\mathcal{P})$, $SAT(\mathcal{P})$ i $CLO^+(\mathcal{P})$. Tada*

$$\Gamma \vdash M : \varphi \Rightarrow M \in \mathcal{P}.$$

Dokaz. Pretpostavimo da $\Gamma \vdash M : \varphi$. Kako važi $SAT(\mathcal{P})$, $\Gamma \models M : \varphi$ na osnovu Tvrdjenja 4.1.11. Posmatrajmo ρ takvo da

$$\rho(y) \equiv y \text{ za sve } y \in \mathtt{var}.$$

Za svako $(x : \sigma) \in \Gamma$ važi da $\rho \models x : \sigma$ pošto $x \in [\![\sigma]\!]$ na osnovu $VAR(\mathcal{P})$. Zbog toga $\rho \models \Gamma$ i $\rho \models M : \varphi$, što znači da

$$M = [\![M]\!]_\rho \in [\![\varphi]\!].$$

Dalje je potrebno pokazati da u ovom slučaju, iz uslova $CLO^+(\mathcal{P})$ sledi da $[\![\varphi]\!] \subseteq \mathcal{P}$. Ovo ćemo dokazati indukcijom po konstrukciji φ.

Slučaj $\varphi \equiv \alpha$ je tipska promenljiva. Kako je $[\![\alpha]\!] = \mathcal{P}$, tvrdjenje sledi na osnovu pretpostavke.

Slučaj $\varphi \equiv \sigma \to \tau$. Neka $M \in [\![\sigma \to \tau]\!]$ i pokažimo da $M \in \mathcal{P}$. Na osnovu definicije interpretacije tipova $[\![-]\!]$ znamo da $M \in [\![\sigma]\!] \to [\![\tau]\!]$. Na osnovu $VAR(\mathcal{P})$ možemo uzeti $x \in [\![\sigma]\!]$, pa sledi da $Mx \in [\![\tau]\!]$. Na osnovu indukcijske pretpostavke $Mx \in \mathcal{P}$. Tada $M \in \mathcal{P}$ zbog $CLO^+(\mathcal{P})$.

Slučaj $\varphi \equiv \sigma \cap \tau$. Na osnovu indukcijske pretpostavke je $[\![\sigma]\!] \subseteq \mathcal{P}$ i $[\![\tau]\!] \subseteq \mathcal{P}$. Samim tim je $[\![\varphi]\!] = [\![\sigma]\!] \cap [\![\tau]\!] \subseteq \mathcal{P}$. $\diamond$

Tvrdjenje 4.1.13 (Valjanost u ondosu na $[\![\ ]\!]_{\mathcal{P}}$ i $[\![\ ]\!]^\omega$) *Neka je dat $\mathcal{P} \subseteq \Lambda$ takav da važe osobine $VAR(\mathcal{P})$, $SAT(\mathcal{P})$ i $CLO(\mathcal{P})$. Tada*

1. *ako $\mathcal{SN} \subseteq \mathcal{P}$, onda*

$$\Gamma \vdash Q : \varphi \Rightarrow \Gamma \models_{\mathcal{P}} Q : \varphi,$$

2. *ako $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{P}$, onda*

$$\Gamma \vdash^\omega Q : \varphi \Rightarrow \Gamma \models^\omega Q : \varphi.$$

Dokaz. Dokaz ovog tvrdjenja je analogan dokazu Tvrdjenja 4.1.11. Jedino što se još mora pokazati u slučaju 3 je da $[\![\lambda x.M]\!]_\rho \in \mathcal{P}$. Na osnovu $VAR(\mathcal{P})$, možemo uzeti $N \equiv x$. Ponavljajući postupak korišćen u slučaju 3, sledi da $(\lambda x.M[x_1 := \rho(x_1), \dots, x_n := \rho(x_n)])x \in [\![\tau]\!]_{\mathcal{P}}$. Dakle, $M[x_1 := \rho(x_1), \dots, x_n := \rho(x_n)] \in [\![\tau]\!]_{\mathcal{P}}$. U ovom slučaju je $M[x_1 := \rho(x_1), \dots, x_n := \rho(x_n)] = [\![M]\!]_{\rho(x:=x)}$, znači da $[\![M]\!]_{\rho(x:=x)} \in [\![\tau]\!]_{\mathcal{P}}$. Na osnovu Leme 4.1.4 $[\![M]\!]_{\rho(x:=x)} \in \mathcal{P}$. Prema tome $\lambda x.[\![M]\!]_{\rho(x:=x)} \in \mathcal{P}$ na osnovu $CLO(\mathcal{P})$, što znači da $[\![\lambda x.M]\!]_{\rho} \in \mathcal{P}$ jer na osnovu Definicije 4.1.5 za svaku valuaciju ρ važi $\lambda x.[\![M]\!]_{\rho(x:=x)} = [\![\lambda x.M]\!]_{\rho}$. $\diamond$

Neposredna posledica valjanosti je sledeće tvrdjenje.

Tvrdjenje 4.1.14 *(i) Neka $\mathcal{P}$ zadovoljava $VAR(\mathcal{P})$, $SAT(\mathcal{P})$ i $CLO(\mathcal{P})$. Ako je $\mathcal{SN} \subseteq \mathcal{P}$, onda*

$$\Gamma \vdash M : \varphi \Rightarrow M \in \mathcal{P}.$$

(ii) Neka $\mathcal{P}$ zadovoljava $VAR(\mathcal{P})$, $SAT(\mathcal{P})$ i $CLO(\mathcal{P})$. Ako je $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{P}$, onda

$$(\forall \varphi \in \mathtt{type}^{\omega} \setminus \{\omega\})\ \Gamma \vdash^{\omega} M : \varphi \Rightarrow M \in \mathcal{P}.$$

Dokaz. (i) Neka $\Gamma \vdash^{(\omega)} M : \varphi$, tada $\Gamma \models^{(\omega)}_{(\mathcal{P})} M : \varphi$ na osnovu Tvrdjenja 4.1.13. Uzmimo valuaciju ρ takvu da $\rho(y) \equiv y$ za svako $y \in \mathtt{var}$. Za svako $(x : \sigma) \in \Gamma$ važi $\rho \models^{(\omega)}_{(\mathcal{P})} x : \sigma$ jer $x \in [\![\sigma]\!]^{(\omega)}_{(\mathcal{P})}$ na osnovu $VAR(\mathcal{P})$. Zbog toga $\rho \models^{(\omega)}_{(\mathcal{P})} \Gamma$ i $\rho \models^{(\omega)}_{(\mathcal{P})} M : \varphi$, što znači da $M \equiv [\![M]\!]_{\rho} \in [\![\varphi]\!]^{(\omega)}_{(\mathcal{P})}$. Na osnovu Leme 4.1.4(i) i (ii) dobijamo da $[\![\varphi]\!]^{(\omega)}_{(\mathcal{P})} \subseteq \mathcal{P}$. Dakle $M \in \mathcal{P}$. $\diamond$

Napomena 4.1.15 *Primetimo da željena osobina, koja tvrdi da term koji ima tip pripada $\mathcal{P}$, u Tvrdjenju 4.1.12 sledi iz uslova $CLO^{+}(\mathcal{P})$, dok u Tvrdjenju 4.1.14 sledi iz uslova $(I3)$ za obe razmatrane interpretacije tipova.*

Da bismo pokazali da za dato $\mathcal{P} \subseteq \Lambda$ važe osobine $VAR(\mathcal{P})$ i $SAT(\mathcal{P})$, koristićemo indukciju po konstrukciji tipa τ, ali tada su nam potrebne jače indukcijske pretpostavke koje je lakše dokazati. Ove jače hipoteze zapravo objedinjuju uslove za zasićene i $\mathcal{P}$-zasićene skupove koji su razmatrani u metodu redukcije u Krivine [28], Barendregt [3], Gallier [16], i Koletsos i Stavrinos [27].

Definicija 4.1.16 *Neka je dat skup $\mathcal{P} \subseteq \Lambda$ Tada:*

1. *Skup* $\mathcal{X} \subseteq \Lambda$ *zadovoljava* $VAR(\mathcal{P}, \mathcal{X})$ *ako*

$$(\forall x \in \texttt{var})\ (\forall n \geq 0)\ (\forall M_1, \ldots, M_n \in \mathcal{P})\ \ xM_1 \ldots M_n \in \mathcal{X}.$$

2. *Skup* $\mathcal{X} \subseteq \Lambda$ *je* $\mathcal{P}$*-zasićen, što označavamo sa* $SAT(\mathcal{P}, \mathcal{X})$*, ako*

$$(\forall M, N \in \mathcal{P})\,(\forall n \geq 0)\,(\forall M_1, \ldots, M_n \in \mathcal{P})$$

$$M[x := N]M_1 \ldots M_n \in \mathcal{X} \ \Rightarrow\ (\lambda x.M)NM_1 \ldots M_n \in \mathcal{X}.$$

Lema 4.1.17 $VAR(\mathcal{P}, \mathcal{P}) \ \Leftrightarrow\ (\forall \varphi \in \texttt{type}^{(\omega)})\ VAR(\mathcal{P}, [\![\varphi]\!]^{(\omega)}_{(\mathcal{P})})$.

Dokaz.
Tvrdjenje ćemo dokazati indukcijom po konstrukciji φ. Pretpostavimo da važi $VAR(\mathcal{P}, \mathcal{P})$.

Slučaj $\varphi \equiv \alpha$ je tipska promenljiva. Kako je $[\![\alpha]\!]^{(\omega)}_{(\mathcal{P})} = \mathcal{P}$, tvrdjenje sledi na osnovu pretpostavke.

Slučaj $\varphi \equiv \tau \to \sigma$.
Neka $M_1, \ldots, M_n \in \mathcal{P}$. Tada $xM_1 \ldots M_n \in \mathcal{P}$ na osnovu pretpostavke. Ostaje da se pokaže da $xM_1 \ldots M_n \in [\![\tau]\!]^{(\omega)}_{(\mathcal{P})} \to [\![\sigma]\!]^{(\omega)}_{(\mathcal{P})}$. Uzmimo proizvoljno $M_{n+1} \in [\![\tau]\!]^{(\omega)}_{(\mathcal{P})}$. Na osnovu Leme 4.1.4 $M_{n+1} \in \mathcal{P}$, pa $xM_1 \ldots M_n M_{n+1} \in [\![\sigma]\!]^{(\omega)}_{(\mathcal{P})}$ sledi na osnovu indukcijske pretpostavke.

Slučaj $\varphi \equiv \tau \cap \sigma$.
Neka $M_1, \ldots, M_n \in \mathcal{P}$. Na osnovu indukcijske pretpostavke $xM_1 \ldots M_n \in [\![\sigma]\!]^{(\omega)}_{(\mathcal{P})}$ i $xM_1 \ldots M_n \in [\![\tau]\!]^{(\omega)}_{(\mathcal{P})}$. Očigledno, $xM_1 \ldots M_n \in [\![\sigma]\!]^{(\omega)}_{(\mathcal{P})} \cap [\![\tau]\!]^{(\omega)}_{(\mathcal{P})}$.

Slučaj $\varphi \equiv \omega$ je očigledan jer $[\![\omega]\!]^{\omega} = \Lambda$.

Dokaz u obrnutom smeru je trivijalan. $\diamond$

Neposredna posledica Leme 4.1.17 je sledeće tvrdjenje.

Posledica 4.1.18 $VAR(\mathcal{P}, \mathcal{P}) \Rightarrow VAR(\mathcal{P})$.

Dokaz. Ako važi $VAR(\mathcal{P}, \mathcal{P})$, tada na osnovu Leme 4.1.17 $VAR(\mathcal{P}, [\![\varphi]\!]^{(\omega)}_{(\mathcal{P})}$ važi za svako $\varphi \in \texttt{type}^{(\omega)}$. Očigledno, $VAR(\mathcal{P}, [\![\varphi]\!]^{(\omega)}_{(\mathcal{P})})$ implicira da $\texttt{var} \subseteq [\![\varphi]\!]^{(\omega)}_{(\mathcal{P})}$ za svaki $(\omega-)$tip φ. $\diamond$

Slično postupamo i za uslove $SAT(\mathcal{P})$ i $SAT(\mathcal{P}, \mathcal{P})$.

Lema 4.1.19 $SAT(\mathcal{P},\mathcal{P}) \Leftrightarrow (\forall\varphi \in \mathtt{type}^{(\omega)})SAT(\mathcal{P},[\![\varphi]\!]^{(\omega)}_{(\mathcal{P})})$.

Dokaz. Indukcijom po konstrukciji φ. Pretpostavimo da važi $SAT(\mathcal{P},\mathcal{P})$.

Slučaj $\varphi \equiv \alpha$ je tipska promenljiva. Pošto $[\![\alpha]\!]^{(\omega)}_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$, tvrdjenje sledi na osnovu pretpostavke.

Slučaj $\varphi \equiv \sigma \to \tau$.
Neka $M, N, M_1, \dots, M_n \in \mathcal{P}$ i pretpostavimo da

$$M[x := N]M_1 \dots M_n \in ([\![\sigma]\!]^{(\omega)}_{\mathcal{P}} \to [\![\tau]\!]^{(\omega)}_{\mathcal{P}}) \cap \mathcal{P}.$$

Na osnovu $SAT(\mathcal{P},\mathcal{P})$ važi da $(\lambda x.M)NM_1 \dots M_n \in \mathcal{P}$. Ostaje da se pokaže da $(\lambda x.M)NM_1 \dots M_n \in [\![\sigma]\!]^{(\omega)}_{\mathcal{P}} \to [\![\tau]\!]^{(\omega)}_{\mathcal{P}}$. Uzmimo proizvoljno $M_{n+1} \in [\![\sigma]\!]^{(\omega)}_{\mathcal{P}}$. Tada $M[x := N]M_1 \dots M_n M_{n+1} \in [\![\tau]\!]^{(\omega)}_{\mathcal{P}}$. Dakle, na osnovu indukcijske pretpostavke sledi da $(\lambda x.M)NM_1 \dots M_n M_{n+1} \in [\![\tau]\!]^{(\omega)}_{\mathcal{P}}$. Kako je M_{n+1} bilo proizvoljno, dobijamo

$$(\lambda x.M)NM_1 \dots M_n \in [\![\sigma]\!]^{(\omega)}_{\mathcal{P}} \to [\![\tau]\!]^{(\omega)}_{\mathcal{P}}.$$

Slučaj $\varphi \equiv \tau \cap \sigma$.
Neka $M, N, M_1, \dots, M_n \in \mathcal{P}$ i pretpostavimo da

$$M[x := N]M_1 \dots M_n \in [\![\tau]\!]^{(\omega)}_{\mathcal{P}} \cap [\![\sigma]\!]^{(\omega)}_{\mathcal{P}}.$$

Tada $M[x := N]M_1 \dots M_n \in [\![\tau]\!]^{(\omega)}_{\mathcal{P}}$ i $M[x := N]M_1 \dots M_n \in [\![\sigma]\!]^{(\omega)}_{\mathcal{P}}$. Na osnovu indukcijske pretpostavke sledi da $(\lambda x.M)NM_1 \dots M_n \in [\![\tau]\!]^{(\omega)}_{\mathcal{P}}$ i $(\lambda x.M)NM_1 \dots M_n \in [\![\sigma]\!]^{(\omega)}_{\mathcal{P}}$. Dakle,

$$(\lambda x.M)NM_1 \dots M_n \in [\![\tau]\!]^{(\omega)}_{\mathcal{P}} \cap [\![\sigma]\!]^{(\omega)}_{\mathcal{P}}.$$

Slučaj $\varphi \equiv \omega$ je očigledan jer $[\![\omega]\!]^{\omega} = \Lambda$.

Dokaz u obrnutom smeru je trivijalan. $\diamond$

Posledica 4.1.20 $SAT(\mathcal{P},\mathcal{P}) \Rightarrow SAT(\mathcal{P})$.

Dokaz. Na osnovu Leme 4.1.19 i Definicije 4.1.8 za $SAT(\mathcal{P})$. $\diamond$

Očigledno, uslovi $VAR(\mathcal{P},\mathcal{P})$ i $SAT(\mathcal{P},\mathcal{P})$ su uopštenja uslova $VAR(\mathcal{P})$ i $SAT(\mathcal{P})$, redom.

U sledećem tvrdjenju je dat opšti postupak redukcije. Pomoću ovog postupka mogu se na uniforman način dokazati različite redukcione osobine lambda terma koji imaju tip u $\lambda\cap$ i $\lambda\cap\Omega$. Ove osobine biće pokazane u sledećim odeljcima.

Tvrdjenje 4.1.21 (Metod redukcije) *(i) Neka je $\mathcal{P} \subseteq \Lambda$ takav da je $\mathcal{SN} \subseteq \mathcal{P}$ i neka važe osobine VAR$(\mathcal{P},\mathcal{P})$, SAT$(\mathcal{P},\mathcal{P})$ i CLO$^+(\mathcal{P})$. Tada*

$$\Gamma \vdash M : \varphi \Rightarrow M \in \mathcal{P};$$

(ii) Neka je $\mathcal{P} \subseteq \Lambda$ skup za koji važe osobine VAR$(\mathcal{P},\mathcal{P})$, SAT$(\mathcal{P},\mathcal{P})$ i CLO$(\mathcal{P})$. Tada

1. *ako $\mathcal{SN} \subseteq \mathcal{P}$, onda*

$$\Gamma \vdash M : \varphi \Rightarrow M \in \mathcal{P};$$

2. *ako $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{P}$, onda*

$$(\forall \varphi \in \mathtt{type}^{\omega} \setminus \{\omega\})\ \ \Gamma \vdash^{\omega} M : \varphi \Rightarrow M \in \mathcal{P}.$$

Dokaz.
(i) Na osnovu Tvrdjenja 4.1.12 i Posledica 4.1.18 i 4.1.20.
(ii) Na osnovu Tvrdjenja 4.1.14 i Posledica 4.1.18 i 4.1.20. $\diamond$

Redukcijske osobine sistema $\lambda\cap$ se mogu dokazati primenom oba dela metoda, dok se za redukcijske osobine sistema $\lambda\cap\Omega$ koristi drugi deo metoda.

4.2 Kompletan metod u $\lambda\cap$

U ovom odeljku ćemo pokazati primenu opšteg postupka redukcije u dokazivanju sledećih osobina koje zadovoljavaju termi koji imaju tip u sistemu $\lambda\cap$: postojanje normalne forme, jedinstvenost normalne forme, konačnost redukcije sa leve strane i jaku normalizaciju. Dokazi ovih osobina koje ćemo dati su uniformni, jer su zasnovani na opštem postupku redukcije koji je dokazan u Tvrdjenju 4.1.21(i) i (ii)1.

Razmatraćemo sledeće skupove:

1. $\mathcal{P} = \mathcal{N} = \{M \in \Lambda \mid \exists L \in \Lambda,\ M \twoheadrightarrow L,\ \text{L je normalna forma}\}$,

2. $\mathcal{P} = \mathcal{U} = \{M \in \Lambda \mid \text{M ima jedinstvenu normalnu formu}\}$,
3. $\mathcal{P} = \mathcal{L} = \{M \in \Lambda \mid \text{redukcija sa leve strane za M je konačna}\}$,
4. $\mathcal{P} = \mathcal{SN} = \{M \in \Lambda \mid \neg(\exists M_1, M_2, \ldots \in \Lambda)\ M \to M_1 \to M_2 \to \ldots\}$.

4.2.1 Postojanje normalne forme u $\lambda\cap$

U ovom odeljku ćemo posmatrati skup $\mathcal{N}$ svih lambda terma koji imaju normalnu formu. Pokazaćemo da za dati skup važe osobine $VAR(\mathcal{N},\mathcal{N})$, $SAT(\mathcal{N},\mathcal{N})$, $CLO(\mathcal{N})$ i $CLO^+(\mathcal{N})$. Postojanje normalne forme za lambda terme koji imaju tip u $\lambda\cap$ je onda posledica opšteg metoda redukcije dokazanog u prethodnom poglavlju Tvrdjenjem 4.1.21(i) ili (ii)1.

Definišimo skup $\mathcal{N}$ svih lambda terma koji imaju normalnu formu.

Definicija 4.2.1

$$\mathcal{N} = \{M \in \Lambda \mid \exists L \in \Lambda,\ M \twoheadrightarrow L,\ L \textit{ je normalna forma}\}.$$

Lema 4.2.2 *$VAR(\mathcal{N},\mathcal{N})$.*

Dokaz. Neka $M_1, \ldots, M_n \in \mathcal{N}$. Tada postoje termi M_i', $1 \leq i \leq n$ takvi da $M_i \twoheadrightarrow M_i'$ i M_i' su normalne forme, $1 \leq i \leq n$. Na osnovu Teoreme 2.1.9(2), $xM_1' \ldots M_n'$ je takodje normalna forma. Ali $xM_1 \ldots M_n \twoheadrightarrow xM_1' \ldots M_n'$ tako da

$$xM_1 \ldots M_n \in \mathcal{N}.\ \diamond$$

Lema 4.2.3 *$SAT(\mathcal{N},\mathcal{N})$.*

Dokaz. Pretpostavimo da $M, N, M_1, \ldots, M_n \in \mathcal{N}$ i $M[x := N]M_1 \ldots M_n \in \mathcal{N}$. Pri redukciji terma $(\lambda x.M)NM_1, \ldots, M_n$, početni redeks $(\lambda x.M)N$ mora biti redukovan da bi se dobila normalna forma. Kako termi $M, N, M_1, \ldots, M_n$ imaju normalne forme, oni mogu biti redukovani do njihovih normalnih formi $M', N', M_1', \ldots, M_n'$, redom. Tada

$$(\lambda x.M)NM_1, \ldots, M_n \twoheadrightarrow (\lambda x.M')N'M_1', \ldots, M_n' \twoheadrightarrow M'[x := N']M_1' \ldots M_n'.$$

Ali

$$M[x := N]M_1 \ldots M_n \twoheadrightarrow M'[x := N']M_1' \ldots M_n' \text{ i } M[x := N]M_1 \ldots M_n \in \mathcal{N},$$

tako da

$$(\lambda x.M)NM_1, \ldots, M_n \in \mathcal{N}.\ \diamond$$

Lema 4.2.4 **(***CLO*$(\mathcal{N})$**)** $M \in \mathcal{N} \Rightarrow \lambda x.M \in \mathcal{N}$.

Dokaz. Neka $M \in \mathcal{N}$ i pretpostavimo da je N normalna forma terma M. Na osnovu Teoreme 2.1.9(3), $\lambda x.N$ je takodje normalna forma, i to je normalna forma za term $\lambda x.M$, što znači da

$$\lambda x.M \in \mathcal{N}. \diamond$$

Lema 4.2.5 **(***CLO*$^+(\mathcal{N})$**)** $Mx \in \mathcal{N} \Rightarrow M \in \mathcal{N}$.

Dokaz. Pretpostavimo da $Mx \in \mathcal{N}$ i $M \notin \mathcal{N}$. Dakle, M nema normalnu formu, što znači da su sve redukcije od M beskonačne i sve su oblika $M \to M_1 \to M_2 \to \ldots$, za neke $M_1, M_2, \ldots$. Razlikujemo dva slučaja:

- Ako nijedan od M_i nije apstrakcija, tada su sve redukcije terma Mx oblika $Mx \to M_1x \to M_2x \to \ldots$, što bi značilo da $Mx \notin \mathcal{N}$. Kontradikcija.

- Neka je na primer, $M_i \equiv \lambda y.P_i$. Tada su $M_j \equiv \lambda y.P_j$ za svako $j \geq i$. Znači da je data redukcija od M oblika

$$M \to M_1 \to M_2 \to \ldots \to \lambda y.P_i \to \lambda y.P_{i+1} \to \ldots.$$

  Ali je tada odgovarajuća redukcija terma Mx oblika

$$Mx \to M_1x \to \ldots \to (\lambda y.P_i)x \to P'_i[y := x] \to \ldots,$$

  gde $P_i \twoheadrightarrow P'_i$. Dobijamo da je i ova redukcija terma Mx beskonačna, što je u kontradikciji sa $Mx \in \mathcal{N}$. $\diamond$

Tvrdjenje 4.2.6 *Neka je dat term* $M \in \Lambda$. *Ako postoje baza* Γ *i tip* $\varphi \in$ `type`, *takvi da* $\Gamma \vdash M : \varphi$, *tada* M *ima normalnu formu.*

Dokaz. Na osnovu Tvrdjenja 4.1.21(i) i Lema 4.2.2, 4.2.3 i 4.2.5 ili na osnovu Tvrdjenja 4.1.21(ii)1 i Lema 4.2.2, 4.2.3 i 4.2.4. $\diamond$

4.2.2 Jedinstvenost normalne forme u $\lambda\cap$

U ovom odeljku posmatraćemo skup $\mathcal{U}$ svih lambda terma koji imaju jedinstvenu normalnu formu, pri čemu se posmatra jedinstvena normalna forma u odnosu na $\alpha-$konverziju, odnosno preimenovanje vezanih promenljivih. Jedinstvenost normalne forme sledi iz postojanja normalne forme i konfluencije, ali će ovde biti dat direktan dokaz ove osobine. Pokazaćemo da za skup $\mathcal{U}$ važe osobine *VAR*($\mathcal{U}$,$\mathcal{U}$), *SAT*($\mathcal{U}$,$\mathcal{U}$), *CLO*($\mathcal{U}$) i *CLO*$^+$($\mathcal{U}$) . Kao posledicu, dobijamo da svaki lambda term koji ima tip u $\lambda\cap$ ima jedinstvenu normalnu formu (Posledica 2.1.11(1)).

Definicija 4.2.7

$$\mathcal{U} = \{M \in \Lambda \mid M \textit{ ima jedinstvenu normalnu formu}\}.$$

Lema 4.2.8 *VAR*($\mathcal{U}$,$\mathcal{U}$).

Dokaz. Neka $M_1, \ldots, M_n \in \mathcal{U}$ i pretpostavimo da su P_1 i P_2 dve različite normalne forme terma $P \equiv xM_1 \ldots M_n$. Tada $P_1 \twoheadleftarrow P \twoheadrightarrow P_2$ i P_1 i P_2 moraju biti oblika $P_1 \equiv xM'_1 \ldots M'_n$ i $P_2 \equiv xM''_1 \ldots M''_n$, gde su M'_i i M''_i normalne forme za M_i, $1 \leq i \leq n$. Pošto $M_i \in \mathcal{U}$, $1 \leq i \leq n$, sledi da $M'_i \equiv M''_i$. Dakle, $P_1 \equiv P_2$, odnosno

$$xM_1 \ldots M_n \in \mathcal{U}. \diamond$$

Lema 4.2.9 *SAT*($\mathcal{U}$,$\mathcal{U}$).

Dokaz. Neka $M, N, M_1, \ldots, M_n \in \mathcal{U}$ i neka $M[x := N]M_1 \ldots M_n \in \mathcal{U}$. Označimo sa P_1 i P_2 dve različite normalne forme terma

$$P \equiv (\lambda x.M)NM_1, \ldots, M_n.$$

Tada

$$P_1 \twoheadleftarrow P \twoheadrightarrow P_2,$$

$$P_1 \equiv M'[x := N']M'_1 \ldots M'_n$$

i

$$P_2 \equiv M''[x := N'']M''_1 \ldots M''_n,$$

gde su M', M'', N', N'', M_i', M_i'' normalne forme za M, N, M_i, $1 \leq i \leq n$ redom. Početni redeks $(\lambda x.M)N$ terma P mora biti redukovan da bi se dobile normalne forme. Ali

$$M'[x := N']M_1' \dots M_n' \twoheadleftarrow M[x := M]M_1 \dots M_n \twoheadrightarrow M''[x := N'']M_1'' \dots M_n''$$

i $M[x := N]M_1 \dots M_n \in \mathcal{U}$ odakle dobijamo da je $P_1 \equiv P_2$, što znači da

$$(\lambda x.M)NM_1, \dots, M_n \in \mathcal{U}. \diamond$$

Lema 4.2.10 ($CLO(\mathcal{U})$) *$M \in \mathcal{U} \Rightarrow \lambda x.M \in \mathcal{U}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da $M \in \mathcal{U}$ i označimo sa P_1 i P_2 dve različite normalne forme terma $P \equiv \lambda x.M$. Jedini način da se redukuje P je

$$P_1 \equiv \lambda x.M_1 \twoheadleftarrow \lambda x.M \twoheadrightarrow \lambda x.M_2 \equiv P_2$$

gde $M_1 \twoheadleftarrow M \twoheadrightarrow M_2$ i M_1 i M_2 su normalne forme. Ali $M \in \mathcal{U}$, odakle sledi da je $M_1 \equiv M_2$. Znači $\lambda x.M_1 \equiv \lambda x.M_2$ i

$$\lambda x.M \in \mathcal{U}. \diamond$$

Lema 4.2.11 ($CLO^+(\mathcal{U})$) *$Mx \in \mathcal{U} \Rightarrow M \in \mathcal{U}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da M ima dve normalne forme

$$N_1 = \lambda x_1 \dots x_n.yP_1 \dots P_k,$$

$$N_2 = \lambda y_1 \dots y_l.zQ_1 \dots Q_s.$$

Tada i term Mx ima dve normalne forme $\lambda x_2 \dots x_n.yP_1 \dots P_k[x_1 := x]$ i $\lambda y_2 \dots y_l.zQ_1 \dots Q_s[y_1 := x]$, što je suprotno pretpostavci. $\diamond$

Tvrdjenje 4.2.12 *Neka je dato $M \in \Lambda$. Ako postoji baza Γ i tip $\varphi \in$* `type` *takvi da $\Gamma \vdash M : \varphi$, tada M ima jedinstvenu normalnu formu.*

Dokaz. Na osnovu Tvrdjenja 4.1.21(i) i Lema 4.2.8, 4.2.9 i 4.2.17 ili na osnovu Tvrdjenja 4.1.21(ii)1 i Lema 4.2.8, 4.2.9 i 4.2.10. $\diamond$

4.2.3 Konačnost redukcije sa leve strane u $\lambda\cap$

Podsetimo se da redukcija sa leve strane, $\twoheadrightarrow_\ell$, redukuje najpre redeks sa leve strane (Definicija 2.1.8).

Za skup $\mathcal{L}$ svih lambda terma za koje redukcija sa leve strane ima osobinu normalizacije, pokazaćemo da važe osobine $VAR(\mathcal{L},\mathcal{L})$, $SAT(\mathcal{L},\mathcal{L})$, $CLO(\mathcal{L})$ i $CLO^+(\mathcal{L})$. Kao posledicu, dobijamo da za lambda terme koji imaju tip u sistemu $\lambda\cap$, redukcija sa leve strane je konačna (Teorema 2.1.15).

Definicija 4.2.13 *Definišimo $\mathcal{L}$ sa:*

$$\mathcal{L} = \{M \in \Lambda \mid \text{ redukcija sa leve strane za } M \text{ je konačna}\}.$$

Lema 4.2.14 $VAR(\mathcal{L},\mathcal{L})$.

Dokaz. Neka $M_1,\ldots,M_n \in \mathcal{L}$. Jedini način da se redukuje $xM_1\ldots M_n$ koristeći redukciju sa leve strane je

$$xM_1\ldots M_n \twoheadrightarrow_\ell xM_1'\ldots M_n',$$

gde $M_i \twoheadrightarrow_\ell M_i'$, $1 \leq i \leq n$. Pošto $M_i \in \mathcal{L}$, $1 \leq i \leq n$, sledi da su sve ove redukcije konačne, što znači da je i prva redukcija konačna, tako da

$$xM_1\ldots M_n \in \mathcal{L}. \diamond$$

Lema 4.2.15 $SAT(\mathcal{L},\mathcal{L})$.

Dokaz. Pretpostavimo da $M,N,M_1,\ldots,M_n \in \mathcal{L}$ i $M[x:=N]M_1\ldots M_n \in \mathcal{L}$. Treba pokazati da $(\lambda x.M)NM_1\ldots M_n \in \mathcal{L}$. Redukcija sa leve strane terma $(\lambda x.M)NM_1\ldots M_n$ mora početi sa redukcijom početnog redeksa $(\lambda x.M)N$. Dakle, prvi korak u ovoj redukciji je sledeći:

$$(\lambda x.M)NM_1\ldots M_n \twoheadrightarrow_\ell M[x:=N]M_1\ldots M_n.$$

Kako $M[x:=N]M_1\ldots M_n \in \mathcal{L}$, sledi da

$$(\lambda x.M)NM_1\ldots M_n \in \mathcal{L}. \diamond$$

Lema 4.2.16 ($CLO(\mathcal{L})$) $M \in \mathcal{L} \Rightarrow \lambda x.M \in \mathcal{L}$.

Dokaz. Ako $M \in \mathcal{L}$, onda i $\lambda x.M \in \mathcal{L}$, jer se prilikom ove lambda apstrakcije ne formiraju novi redeksi. $\diamond$

Lema 4.2.17 **($CLO^+(\mathcal{L})$)** $Mx \in \mathcal{L} \Rightarrow M \in \mathcal{L}$.

Dokaz. Neka $Mx \in \mathcal{L}$ i pretpostavimo $M \notin \mathcal{L}$. Ako M ne počinje sa apstrakcijom, onda znači da i $Mx \notin \mathcal{L}$, jer je krajnje leva redukcija terma Mx, upravo krajnje leva redukcija terma M, što je suprotno pretpostavci. Ako M počinje sa apstrakcijom, onda dobijamo novi krajnje levi redeks, koji kada redukujemo stižemo do prvog krajnje levog redeksa terma M, dakle i ovog puta možemo zaključiti da $Mx \notin \mathcal{L}$. $\diamond$

Tvrdjenje 4.2.18 *Neka je dato $M \in \Lambda$. Ako postoji baza Γ i tip $\varphi \in$ `type` takvi da $\Gamma \vdash M : \varphi$, tada je redukcija sa leve strane terma M konačna.*

Dokaz. Na osnovu Tvrdjenja 4.1.21(i) i Lema 4.2.14, 4.2.15 i **??**, ili na osnovu Tvrdjenja 4.1.21(ii)1 i Lema 4.2.14, 4.2.15 i 4.2.16. $\diamond$

4.2.4 Jaka normalizacija u $\lambda\cap$

Svi termi koji imaju tip u $\mathcal{D}$ i $\lambda\cap$ imaju osobinu jake normalizacije (Teorema 2.3.9).

U ovom delu ćemo pokazati da, u slučaju jake normalizacije, mogu biti primenjena oba dela opšteg postupka redukcije (Tvrdjenje 4.1.21(i)1 i (ii)1). Zapravo, pokazaćemo da za skup $\mathcal{SN}$ svih lambda terma koji imaju osobinu jake normalizacije, važe osobine $VAR(\mathcal{SN}, \mathcal{SN})$, $SAT(\mathcal{SN}, \mathcal{SN})$, $CLO(\mathcal{SN})$ i $CLO^+(\mathcal{SN})$. Tada je jaka normalizacija svih lambda terma koji imaju tip u sistemu $\lambda\cap$ direktna posledica Tvrdjenja 4.1.21.

Definicija 4.2.19 *Skup svih lambda terma koji imaju osobinu jake normalizacije se definiše na sledeći način.*

$$\mathcal{SN} = \{M \in \Lambda \mid \neg(\exists M_1, M_2, \ldots \in \Lambda)\, M \to M_1 \to M_2 \to \ldots\}.$$

Lema 4.2.20 $VAR(\mathcal{SN}, \mathcal{SN})$.

Dokaz. Neka $x \in$ `var` i $M_1, \ldots, M_n \in \mathcal{SN}$. Ako $xM_1 \ldots M_n \twoheadrightarrow Z$, tada mora biti $Z \equiv xM_1' \ldots M_n'$. Pošto su redukcije $M_i \twoheadrightarrow M_i'$ konačne, mora biti konačna i redukcija $xM_1 \ldots M_n \twoheadrightarrow Z$. $\diamond$

Lema 4.2.21 *$SAT(\mathcal{SN}, \mathcal{SN})$.*

Dokaz. Neka $M, N, M_1 \dots M_n \in \mathcal{SN}$ i $M[x := M]M_1 \dots M_n \in \mathcal{SN}$. Pretpostavimo da postoji beskonačna redukcija terma $(\lambda x.M)NM_1 \dots M_n$. Razlikujemo dva slučaja. Ako se početni redeks ne redukuje, onda imamo beskonačnu redukciju

$$(\lambda x.M)NM_1 \dots M_n \twoheadrightarrow (\lambda x.M')N'M'_1 \dots M'_n \twoheadrightarrow (\lambda x.M'')N''M''_1 \dots M''_n$$

gde $M \twoheadrightarrow M', M \twoheadrightarrow N'$ i $M_i \twoheadrightarrow M'_i$ za $1 \leq i \leq n$. Odatle sledi da postoji bekonačna redukcija jednog ili svih terma $M, N, M_1 \dots M_n$ što je u suprotnosti sa pretpostavkom da $M, N, M_1 \dots M_n \in \mathcal{SN}$. Ako se nakon konačnog broja koraka početni redeks redukuje:

$$(\lambda x.M)NM_1 \dots M_n \twoheadrightarrow (\lambda x.M')N'M'_1 \dots M'_n \rightarrow M'[x := N']M'_1 \dots M'_n,$$

gde $M \twoheadrightarrow M', M \twoheadrightarrow N'$ i $M_i \twoheadrightarrow M'_i$ za $1 \leq i \leq n$, dobijamo da term $M'[x := N']M'_1 \dots M'_n$ može biti beskonačno redukovan, a samim tim to važi i za term $M[x := N]M_1 \dots M_n$, jer $M[x := N]M_1 \dots M_n \twoheadrightarrow M'[x := N']M'_1 \dots M'_n$. Ovo je u suprotnosti sa činjenicom da $M[x := N]M_1 \dots M_n \in \mathcal{SN}$. $\diamond$

Lema 4.2.22 **(***$CLO(\mathcal{SN})$***)** *$M \in \mathcal{SN} \Rightarrow \lambda x.M \in \mathcal{SN}$.*

Dokaz. Ako bi term $\lambda x.M$ mogao biti beskonačno redukovan, tada bi ova redukcija bila oblika

$$\lambda x.M \rightarrow \lambda x.M_1 \rightarrow \lambda x.M_2 \rightarrow \dots,$$

sa beskonačnom redukcijom $M \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow \dots$. Dobijamo kontradikciju sa činjenicom da $M \in \mathcal{SN}$. $\diamond$

Lema 4.2.23 **(***$CLO^+(\mathcal{SN})$***)** *$Mx \in \mathcal{SN} \Rightarrow M \in \mathcal{SN}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da $Mx \in \mathcal{SN}$ i da $M \notin \mathcal{SN}$. Tada postoji beskonačna redukcija $M \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow \dots$. Kao posledicu dobijamo da je

$$Mx \rightarrow M_1x \rightarrow M_2x \rightarrow \dots$$

takodje beskonačna redukcija. Ovo je u kontradikciji sa činjenicom da $Mx \in \mathcal{SN}$. $\diamond$

Tvrdjenje 4.2.24 *Neka je dat term $M \in \Lambda$. Ako postoji baza Γ i tip $\varphi \in$* `type` *takvi da $\Gamma \vdash M : \varphi$, tada M ima osobinu jake normalizacije.*

Dokaz. Na osnovu Tvrdjenja 4.1.21(i) i Lema 4.2.20, 4.2.21 i 4.2.23, ili na osnovu Tvrdjenja 4.1.21(ii)1 i Lema 4.2.20, 4.2.21 i 4.2.22. $\diamond$

4.3 Prvi deo metoda

Prednost prvog dela opšteg postupka redukcije pokazanog Tvrdjenjem 4.1.21(i) je u definicije interpretacije tipova (Definicija 4.1.3). U ovom slučaju, definicija interpretacije tipova ne postavlja nikakva ograničenja u odnosu na posmatrani skup $\mathcal{P} \subseteq \Lambda$. Ali tada moramo uvesti jači uslov $CLO^+(\mathcal{P})$ za $\mathcal{P} \subseteq \Lambda$. Tako dobijamo željenu posledicu da term koji ima tip u sistemima sa presekom pripada $\mathcal{P}$, kao što je primećeno u Napomeni 4.1.15. U ovom delu ćemo pokazati da je opšti postupak redukcije dat Tvrdjenjem 4.1.21(i) primenljiv kada je skup $\mathcal{P}$ jedan od sledećih skupova:

1. $\mathcal{P} = \mathcal{CE} = \{M \in \Lambda \mid \beta\eta$-redukcija je konfluentna za $M\}$,
2. $\mathcal{P} = \mathcal{UE} = \{M \in \Lambda \mid M$ ima jedinstvenu $\beta\eta$-normalnu formu$\}$,

U Koletsos i Stavrinos [27] ovaj metod je primenjen da bi se pokazala Teorema o zatvaranju koja kaže da svi Λ_I termi koji imaju normalnu formu, imaju osobinu jake normalizacije.

4.3.1 Konfluencija relacije $\twoheadrightarrow_{\beta\eta}$ u $\lambda\cap$

Posmatrajmo skup $\mathcal{CE}$ svih lambda terma za koje je $\beta\eta$-redukcija konfluentna. Da bi pokazali da je $\beta\eta$-redukcija konfluentna (Teorema 2.1.12) za sve lambda terme koji imaju tip u $\lambda\cap$, pokazaćemo da važe osobine $VAR(\mathcal{CE}, \mathcal{CE})$, $SAT(\mathcal{CE}, \mathcal{CE})$ i $CLO^+(\mathcal{CE})$ i primeniti Tvrdjenje 4.1.21(i). Ova osobina je pokazana u Mitchell [31] i [32] i Statman [35] za lambda terme koji imaju tip u osnovnom tipskom sistemu.

Definicija 4.3.1

$$\mathcal{CE} = \{M \in \Lambda \ \mid \ P \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} M \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} R \ \Rightarrow \exists S \in \Lambda \ \ (P \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} S \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} R)\}.$$

Lema 4.3.2 *$VAR(\mathcal{CE}, \mathcal{CE})$.*

Dokaz.

Pretpostavimo da $M_1, \ldots, M_n \in \mathcal{CE}$ i

$$xM'_1 \ldots M'_n \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} xM_1 \ldots M_n \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} xM''_1 \ldots M''_n.$$

Na osnovu indukcijske pretpostavke sledi da $\exists N_i$ takvi da $M'_i \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} N_i \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} M''_i$, $1 \leq i \leq n$. Ali tada

$$xM'_1 \ldots M'_n \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} xN_1 \ldots N_n \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} xM''_1 \ldots M''_n.$$

Odavde sledi da

$$xM_1 \ldots M_n \in \mathcal{CE}. \diamond$$

Lema 4.3.3 *SAT*$(\mathcal{CE}, \mathcal{CE})$.

Dokaz.
Neka $M, N, M_1, \ldots, M_n \in \mathcal{CE}$ i neka $M[x := N]M_1 \ldots M_n \in \mathcal{CE}$. Pokazaćemo da $P \equiv (\lambda x.M)NM_1 \ldots M_n \in \mathcal{CE}$.
Pretpostavimo da

$$Q \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} P \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} R.$$

U zavisnosti od toga da li se redukuje početni redeks terma P, razlikujemo sledeće slučajeve:

Slučaj

$$(\lambda x.M')N'M'_1 \ldots M'_n \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} P \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} (\lambda x.M'')N''M''_1 \ldots M''_n,$$

gde $M' \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} M \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} M''$, $N' \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} N \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} N''$ i $M'_i \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} M_i \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} M''_i$, $1 \leq i \leq n$. Kako $M, N, M_i \in \mathcal{CE}$, sledi da

$$\exists S \text{ takvo da } M' \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} S \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} M'';$$

$$\exists S_i \text{ takvi da } M'_i \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} S_i \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} M''_i, 1 \leq i \leq n;$$

$$\exists Z \text{ takvo da } N' \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} Z \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} N''.$$

Ali tada

$$(\lambda x.M')N'M'_1 \ldots M'_n \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} (\lambda x.S)ZS_1 \ldots S_n \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} (\lambda x.M'')N''M''_1 \ldots M''_n,$$

pa dobijamo da

$$(\lambda x.M)NM_1\dots M_n \in \mathcal{CE}.$$

Slučaj

$$Q \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} M'[x:=N']M'_1\dots M'_n \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} P \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} M''[x:=N'']M''_1\dots M''_n \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} R,$$

gde $M' \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} M \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} M'',\ N' \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} N \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} N''$ i $M'_i \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} M_i \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} M''_i,\ 1 \le i \le n$. Ali

$$Q \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} M'[x:=N']M'_1\dots M'_n \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} M[x:=N]M_1\dots M_n \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow}$$

$$\underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} M''[x:=N'']M''_1\dots M''_n \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} R$$

tako da rezultat sledi iz činjenice da $P \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} M[x:=N]M_1\dots M_n \in \mathcal{CE}$.

Slučaj

$$Q \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} M'[x:=N']M'_1\dots M'_n \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} P \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} (\lambda x.M'')N''M''_1\dots M''_n,$$

gde

$$M' \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} M \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} M'',\ N' \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} N \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} N'' \text{ i } M'_i \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} M_i \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} M''_i,\ 1 \le i \le n.$$

Pošto $M, N, M_i \in \mathcal{CE},\ 1 \le i \le n$ sledi da

$$\exists S \text{ takvo da } M' \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} S \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} M''$$

$$\exists S_i \text{ takvi da } M'_i \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} S_i \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} M''_i, 1 \le i \le n$$

$$\exists Z \text{ takvo da } N' \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} Z \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} N''$$

Tada

$$Q \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} M'[x:=N']M'_1\dots M'_n \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} M[x:=N]M_1\dots M_n \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} S[x:=Z]S_1\dots S_n.$$

Ali $M[x:=N]M_1\dots M_n \in \mathcal{CE}$ pa postoji term $R \in \Lambda$ takav da

$$Q \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} R \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} S[x:=Z]S_1\dots S_n.$$

Tada

$$M''[x:=N'']M''_1\dots M''_n \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} S[x:=Z]S_1\dots S_n \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} R. \diamond$$

Lema 4.3.4 ($CLO^+(\mathcal{CE})$) $Mx \in \mathcal{CE} \Rightarrow M \in \mathcal{CE}$.

Dokaz. Neka $Mx \in \mathcal{CE}$ i $M_1 \twoheadleftarrow M \twoheadrightarrow M_2$. Tada $M_1x \twoheadleftarrow Mx \twoheadrightarrow M_2x$. Pošto $Mx \in \mathcal{CE}$ sledi da $\exists S_1, S_2 \in \Lambda$ takvo da $M_1x \twoheadrightarrow S_1$, $M_2x \twoheadrightarrow S_2$, i $S_1 =_\eta S_2$. Poslednje dve redukcije se dalje mogu redukovati na dva načina.
Slučaj 1.

$S_1 \equiv M_3x$, $S_2 \equiv M_4x$. Tada $M_1x \twoheadrightarrow M_3x$, $M_2x \twoheadrightarrow M_4x$ i $M_3x =_\eta M_4x$. Dakle, dobijamo da $M_1 \twoheadrightarrow M_3$, $M_2 \twoheadrightarrow M_4$ i $M_3 =_\eta M_4$, što znači da $M \in \mathcal{CE}$.

Slučaj 2.
$M_1x \equiv (\lambda y.N_1)x \twoheadrightarrow N_1'[y := x]$, $N_1 \twoheadrightarrow N_1'$
$M_2x \equiv (\lambda z.N_2)x \twoheadrightarrow N_2'[z := x]$, $N_2 \twoheadrightarrow N_2'$, i
$N_1'[y := x] =_\eta N_2'[z := x]$. Tada $\lambda y.N_1 =_\eta \lambda z.N_2$ do na preimenovanje vezanih promenljivih. Zbog toga, $M_1 \equiv \lambda y.N_1 \twoheadrightarrow \lambda y.N_1'$, $M_2 \equiv \lambda y.N_2 \twoheadrightarrow \lambda y.N_2'$ i $\lambda y.N_1 =_\eta \lambda y.N_2$, tako da $M \in \mathcal{CE}$. $\diamond$

Tvrdjenje 4.3.5 *Neka je dat lambda term $M \in \Lambda$. Ako postoji baza Γ i tip $\varphi \in \mathtt{type}^\omega$, takvi da $\Gamma \vdash M : \varphi$, tada je $\beta\eta$-redukcija konfluentna na M.*

Dokaz. Na osnovu Tvrdjenja 4.1.21(i) i Lema 4.3.2, 4.3.3 i 4.3.4. $\diamond$

4.3.2 Jedinstvenost $\beta\eta$-normalne forme u $\lambda\cap$

U ovom delu posmatraćemo skup $\mathcal{UE}$ svih lambda terma koji imaju jedinstvenu $\beta\eta$-normalnu formu. Za ovaj skup ćemo dokazati osobine $VAR(\mathcal{UE},\mathcal{UE})$, $SAT(\mathcal{UE},\mathcal{UE})$ i $CLO^+(\mathcal{UE})$. Tada je posledica opšteg postupka redukcije pokazanog u Poglavlju 3.1 činjenica da svi lambda termi koji imaju tip u $\lambda\cap$, imaju jedinstvenu $\beta\eta$-normalnu formu.

Definicija 4.3.6

$$\mathcal{UE} = \{M \in \Lambda \mid M \ \text{ ima jedinstvenu } \beta\eta\text{-normalnu formu}\}.$$

Lema 4.3.7 $VAR(\mathcal{UE},\mathcal{UE})$.

Dokaz.

Neka $M_1, \ldots, M_n \in \mathcal{UE}$ i pretpostavimo da su P_1 i P_2 dve različite $\beta\eta$-normalne forme za $P \equiv xM_1 \ldots M_n$. Tada

$$P_1 \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} P \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} P_2$$

i P_1 i P_2 moraju biti oblika

$$P_1 \equiv xM'_1 \ldots M'_n$$

i

$$P_2 \equiv xM''_1 \ldots M''_n,$$

gde su M'_i i M''_i $\beta\eta$-normalne forme za M_i, $1 \leq i \leq n$. Ali $M_i \in \mathcal{UE}$, $1 \leq i \leq n$, tako da su ove $\beta\eta$-normalne forme jedinstvene. Dakle, $P_1 \equiv P_2$ i to je $\beta\eta$-normalna forma za $xM_1 \ldots M_n$, odnosno

$$xM_1 \ldots M_n \in \mathcal{UE}. \diamond$$

Lema 4.3.8 *SAT*($\mathcal{UE}$,$\mathcal{UE}$).

Dokaz.

Neka $M, N, M_1, \ldots, M_n \in \mathcal{UE}$ i neka $M[x := N]M_1 \ldots M_n \in \mathcal{UE}$. Treba da pokažemo da $P \equiv (\lambda x.M)NM_1, \ldots, M_n$ ima jedinstvenu $\beta\eta$-normalnu formu. Pretpostavimo da su P_1 i P_2 dve različite $\beta\eta$-normalne forme za P. Tada

$$P_1 \equiv M'[x := N']M'_1 \ldots M'_n$$

i

$$P_2 \equiv M''[x := N'']M''_1 \ldots M''_n$$

jer početni redeks $(\lambda x.M)N$ mora biti redukovan da bi se dobila normalna forma. Pri tome

$$M' \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} M \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} M'',\ N' \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} N \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} N'',\ M'_i \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow} M_i \underset{\beta\eta}{\twoheadrightarrow} M''_i$$

i M', M'', N', N'', M'_i, M''_i su normalne forme za M, N, M_i, $1 \leq i \leq n$ redom. Kako $M, N, M_1, \ldots, M_n \in \mathcal{UE}$, sledi da je $P_1 \equiv P_2$, što implicira da $(\lambda x.M)NM_1, \ldots, M_n$ ima jedinstvenu $\beta\eta$-normalnu formu, odnosno

$$(\lambda x.M)NM_1, \ldots, M_n \in \mathcal{UE}. \diamond$$

Lema 4.3.9 **($CLO^{+}(\mathcal{UE})$)** *$Mx \in \mathcal{UE} \Rightarrow x \in \mathcal{UE}$.*

Dokaz. Neka $Mx \in \mathcal{UE}$ i pretpostavimo da $M \notin \mathcal{UE}$. Tada M ima dve različite $\beta\eta$-normalne forme, označimo ih sa N_1 i N_2. Ako bilo koja od njih počinje sa promenljivom, odmah dobijamo kontradikciju. Ako obe počinju apstrakcijom, odnostno $N_1 \equiv \lambda y.P_1$ i $N_2 \equiv \lambda z.P_2$, i P_1 i P_2 su dve različite $\beta\eta$-normalne forme, tada $Mx \to_\beta P_1[y := x]$ i $Mx \to_\beta P_2[z := x]$. Dakle, Mx ima dve različite $\beta\eta$-normalne forme, što je kontradikcija sa činjenicom da $Mx \in \mathcal{UE}$. $\diamond$

Tvrdjenje 4.3.10 *Neka je dat lambda term $M \in \Lambda$. Ako postoji baza Γ i tip $\varphi \in$ `type` takvi da $\Gamma \vdash M : \tau \Rightarrow M$, tada M ima jedinstvenu $\beta\eta$-normalnu formu.*

Dokaz. Na osnovu Tvrdjenja 4.1.21(i) i Lema 4.3.7, 4.3.8 i 4.3.9. $\diamond$

4.4 Drugi deo metoda

U ovom odeljku ćemo pokazati da termi koji imaju tip u sistemu $\lambda\cap\Omega$ imaju osobinu konfluentnosti, standardizacije i konačnosti razvoja. Ove osobine ćemo dokazati primenom drugog dela opšteg postupka redukcije koji je dokazan u Tvrdjenju 4.1.21(ii)2. Razmatraćemo sledeće skupove:

1. $\mathcal{P} = \mathcal{C} = \{M \in \Lambda \mid \beta\text{-redukcija je konfluentna na } M\}$,

2. $\mathcal{P} = \mathcal{S} = \{M \in \Lambda \mid \text{svaka redukcija od } M \text{ može biti izvedena na standardan način}\}$,

3. $\mathcal{P} = \mathcal{F} = \{M \in \Lambda \mid M^* \text{ ima osobinu jake normalizacije }\}$.
   (M^* predstavlja označeni lambda term, vidi Definiciju 4.4.16.)

Značaj drugog dela metoda je u tome što je primenjiv na sistem $\lambda\cap\Omega$, što za posledicu ima da se tri navedene osobine koje važe u $\lambda\cap\Omega$ mogu jednostavno uopštiti i pokazati da važe za sve lambda terme, što znači za ceo skup Λ.

4.4.1 Konfluencija relacije $\twoheadrightarrow$ u Λ

Neka je $\mathcal{C}$ skup svih lambda terma za koje je β-redukcija konfluentna (ima Church-Rosser-ovu osobinu). Pokazaćemo da za dati skup važe osobine $VAR(\mathcal{C},\mathcal{C})$, $SAT(\mathcal{C},\mathcal{C})$ i $CLO(\mathcal{C})$. Tada je konfluencija β-redukcije za lambda terme koji imaju odgovarajući tip u $\lambda\cap\Omega$ direktna posledica opšteg metoda redukcije datog u prethodnom poglavalju Tvrdjenjem 4.1.21(ii)2. Zatim je moguće dokazati konfluenciju β-redukcije za skup Λ svih lambda terma (Teorema 2.1.10).

Definišimo najpre skup $\mathcal{C}$ svih lambda terma koji imaju Churh-Rosser-ovu osobinu.

Definicija 4.4.1

$$\mathcal{C} = \{M \in \Lambda \mid M_1 \twoheadleftarrow M \twoheadrightarrow M_2 \Rightarrow (\exists M_3 \in \Lambda)\ \ M_1 \twoheadrightarrow M_3 \twoheadleftarrow M_2\}.$$

Lema 4.4.2 *$VAR(\mathcal{C},\mathcal{C})$.*

Dokaz. Pretpostavimo da

$$xM_1' \dots M_n' \twoheadleftarrow xM_1 \dots M_n \twoheadrightarrow xM_1'' \dots M_n''.$$

Jedina mogućnost da se term $xM_1 \dots M_n$ redukuje je da se izvrše redukcije $M_i' \twoheadleftarrow M_i \twoheadrightarrow M_i''$, $1 \leq i \leq n$. Pošto $M_i \in \mathcal{C}$, znači da postoje termi M_i''', $1 \leq i \leq n$, takvi da $M_i' \twoheadrightarrow M_i''' \twoheadleftarrow M_i''$, $1 \leq i \leq n$. Tada

$$xM_1' \dots M_n' \twoheadrightarrow xM_1''' \dots M_n''' \twoheadleftarrow xM_1'' \dots M_n'',$$

što znači da

$$xM_1 \dots M_n \in \mathcal{C}. \diamond$$

Lema 4.4.3 *$SAT(\mathcal{C},\mathcal{C})$.*

Dokaz.
Neka $M, N, M_1, \dots, M_n \in \mathcal{C}$ i $M[x := N]M_1 \dots M_n \in \mathcal{C}$. Označimo sa

$$P \equiv (\lambda x.M)NM_1 \dots M_n$$

i pretpostavimo da

$$R \twoheadleftarrow P \twoheadrightarrow S.$$

U zavisnosti od toga da li se početni redeks terma P redukuje, razlikujemo sledeće slučajeve:

Slučaj

$$(\lambda x.M')N'M_1'\dots M_n' \twoheadleftarrow P \twoheadrightarrow (\lambda x.M'')N''M_1''\dots M_n'',$$

gde $M' \twoheadleftarrow M \twoheadrightarrow M''$, $N' \twoheadleftarrow N \twoheadrightarrow N''$, i $M_i' \twoheadleftarrow M_i \twoheadrightarrow M_i''$, $1 \leq i \leq n$. Pošto $M, N, M_i \in \mathcal{C}$, sledi da postoje termi M''', N''' i $M_i''', 1 \leq i \leq n$ takvi da $M' \twoheadrightarrow M''' \twoheadleftarrow M''$, $N' \twoheadrightarrow N''' \twoheadleftarrow N''$, i $M_i' \twoheadrightarrow M_i''' \twoheadleftarrow M_i''$, $1 \leq i \leq n$. Dakle,

$$(\lambda x.M')N'M_1'\dots M_n' \twoheadrightarrow (\lambda x.M''')N'''M_1'''\dots M_n''' \twoheadleftarrow (\lambda x.M'')N''M_1''\dots M_n''.$$

odnosno $P \in \mathcal{C}$.

Slučaj

$$R \twoheadleftarrow M'[x := N']M_1'\dots M_n' \twoheadleftarrow P \twoheadrightarrow M''[x := N'']M_1''\dots M_n'' \twoheadrightarrow S,$$

gde $M' \twoheadleftarrow M \twoheadrightarrow M''$, $N' \twoheadleftarrow N \twoheadrightarrow N''$ i $M_i' \twoheadleftarrow M_i \twoheadrightarrow M_i''$ za $1 \leq i \leq n$. Tada

$$R \twoheadleftarrow M'[x := N']M_1'\dots M_n' \twoheadleftarrow M[x := N]M_1\dots M_n$$

$$\twoheadrightarrow M''[x := N'']M_1''\dots M_n'' \twoheadrightarrow S,$$

pa rezultat sledi iz činjenice da

$$P \twoheadrightarrow M[x := N]M_1\dots M_n \in \mathcal{C}.$$

Slučaj

$$R \twoheadleftarrow M'[x := N']M_1'\dots M_n' \twoheadleftarrow P \twoheadrightarrow (\lambda x.M'')N''M_1''\dots M_n'',$$

gde $M' \twoheadleftarrow M \twoheadrightarrow M''$, $N' \twoheadleftarrow N \twoheadrightarrow N''$ i $M_i' \twoheadleftarrow M_i \twoheadrightarrow M_i''$ za $1 \leq i \leq n$. Neka $M' \twoheadrightarrow M''' \twoheadleftarrow M''$, $N' \twoheadrightarrow N''' \twoheadleftarrow N''$ i $M_i' \twoheadrightarrow M_i''' \twoheadleftarrow M_i''$ za $1 \leq i \leq n$. Tada

$$R \twoheadleftarrow M'[x := N']M_1'\dots M_n' \twoheadleftarrow M[x := N]M_1\dots M_n \twoheadrightarrow M'''[x := N''']M_1'''\dots M_n'''.$$

Kako $M[x := N]M_1\dots M_n \in \mathcal{C}$, znači da postoji term $Z \in \Lambda$ takav da $R \twoheadrightarrow Z \twoheadleftarrow M'''[x := N''']M_1'''\dots M_n'''$. Ali tada takodje

$$R \twoheadrightarrow Z \twoheadleftarrow M'''[x := N''']M_1'''\dots M_n''' \twoheadleftarrow (\lambda x.M'')N''M_1''\dots M_n''$$

pa opet sledi da $P \in \mathcal{C}$. $\diamond$

Lema 4.4.4 ($CLO(\mathcal{C})$) *$M \in \mathcal{C} \Rightarrow \lambda x.M \in \mathcal{C}$.*

Dokaz. Neka $M \in \mathcal{C}$. Pretpostavimo da

$$R \twoheadleftarrow \lambda x.M \twoheadrightarrow S.$$

Tada je $R \equiv \lambda x.R'$, $S \equiv \lambda x.S'$ i $R' \twoheadleftarrow M \twoheadrightarrow S'$. Dakle, postoji term $Z \in \Lambda$ takav da $R' \twoheadrightarrow Z \twoheadleftarrow S'$ jer $M \in \mathcal{C}$. Tada $\lambda x.R' \twoheadrightarrow \lambda x.Z \twoheadleftarrow \lambda x.S'$, odakle sledi da

$$\lambda x.M \in \mathcal{C}. \diamond$$

Tvrdjenje 4.4.5 *Neka je dato $M \in \Lambda$. Ako postoji baza Γ i tip $\varphi \in \mathtt{type}^\omega \setminus \{\omega\}$ takvi da $\Gamma \vdash^\omega M : \varphi$, tada je β-redukcija konfluentna na M.*

Dokaz. Na osnovu Tvrdjanja 4.1.21(ii)2 i Lema 4.4.2, 4.4.3 i 4.4.4. $\diamond$

Izuzetno važna posledica Tvrdjenja 4.4.5 je konfluencija β-redukcije u skupu Λ svih lambda terma. Da bi dokazali ovo tvrdjenje, dokažimo najpre jednu pomoćnu lemu.

Lema 4.4.6 *Neka $M \in \Lambda$. Tada:*

$$\lambda x.M \in \mathcal{C} \Rightarrow M \in \mathcal{C}.$$

Dokaz. Pretpostavimo da $\lambda x.M \in \mathcal{C}$. Jedini način da se β-redukuje $\lambda x.M$ je da se β-redukuje M. Dakle, $M \in \mathcal{C}$. $\diamond$

Primetimo da prethodna lema ne važi za skup $\mathcal{CE}$ svih terma na kojima je $\beta\eta$-redukcija konfluentna.

Posledica 4.4.7 (Konfluencija β-redukcije) *Ako $M \in \Lambda$, tada $M \in \mathcal{C}$.*

Dokaz. Za svako $M \in \Lambda$, term $\lambda x.M$ je term koji ima slabu početnu normalnu formu, odnosno $\lambda x.M \in \mathcal{W}$. Lako je pokazati da postoji baza Γ takva da $\Gamma \vdash^\omega \lambda x.M : \omega \to \omega$. Na osnovu Tvrdjenja 4.4.5 sledi da $\lambda x.M \in \mathcal{C}$. Na osnovu Leme 4.4.6 sledi da $M \in \mathcal{C}$. $\diamond$

4.4.2 Standardizacija u Λ

Osobina da se svaka redukcija može razložiti na početnu redukciju nakon koje sledi unutrašnja redukcija se naziva standardizacija (Definicija 2.1.7).

Neka $\mathcal{S}$ označava skup svih lambda terma za koje svaka redukcija može biti rastavljena na početnu redukciju nakon koje sledi unutrašnja redukcija. Pokazaćemo da za ovaj skup važe osobine $VAR(\mathcal{S},\mathcal{S})$, $SAT(\mathcal{S},\mathcal{S})$ i $CLO(\mathcal{S})$. Kao posledicu, dokazaćemo Teoremu o standardizaciji za lambda terme koji imaju odredjeni tip u $\lambda\cap\Omega$ a zatim i teoremu o standardizaciji u celom skupu Λ (Teorema 2.1.14).

Definicija 4.4.8

$$\mathcal{S} = \{M \mid M \twoheadrightarrow Z \Rightarrow (\exists N \in \Lambda)\ \ M \twoheadrightarrow_h N \twoheadrightarrow_i Z\}.$$

Lema 4.4.9 $VAR(\mathcal{S},\mathcal{S})$.

Dokaz. Ako $xM_1 \dots M_n \twoheadrightarrow Z$, tada $xM_1 \dots M_n \twoheadrightarrow_i Z$ pošto ovaj term nema početni redeks. $\diamond$

Lema 4.4.10 $SAT(\mathcal{S},\mathcal{S})$.

Dokaz. Neka $M, N, M_1 \dots M_n \in \mathcal{S}$ i neka $M[x := N]M_1 \dots M_n \in \mathcal{S}$. Pretpostavimo da $P \equiv (\lambda x.M)NM_1 \dots M_n \twoheadrightarrow Z$.

Slučaj

$$Z \equiv (\lambda x.M')N'M'_1 \dots M'_n,$$

$M \twoheadrightarrow M'$, $N \twoheadrightarrow N'$ i $M_i \twoheadrightarrow M'_i$ za $1 \leq i \leq n$. Redukcija je tada unutrašnja

$$P \twoheadrightarrow_h P \twoheadrightarrow_i Z.$$

Slučaj

$$P \twoheadrightarrow (\lambda x.M')N'M'_1 \dots M'_n \to M'[x := N']M'_1 \dots M'_n \twoheadrightarrow Z,$$

$M \twoheadrightarrow M'$, $N \twoheadrightarrow N'$ i $M_i \twoheadrightarrow M'_i$ za $1 \leq i \leq n$. Tada $M[x := N]M_1 \dots M_n \twoheadrightarrow M'[x := N']M'_1 \dots M'_n$. Kako $M[x := N]M_1 \dots M_n \in \mathcal{S}$, imamo da $(\lambda x.M)NM_1 \dots M_n \to_h M[x := N]M_1 \dots M_n \twoheadrightarrow_h Z' \twoheadrightarrow_i Z$, što znači da

$$(\lambda x.M)NM_1 \dots M_n \in \mathcal{S}. \diamond$$

Lema 4.4.11 **($CLO(\mathcal{S})$)** *$M \in \mathcal{S} \Rightarrow \lambda x.M \in \mathcal{S}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da $M \in \mathcal{S}$ i $\lambda x.M \twoheadrightarrow Z$. Tada Z mora biti oblika $Z \equiv \lambda x.M'$ gde $M \twoheadrightarrow M'$. $M \in \mathcal{S}$, $M \twoheadrightarrow_h N \twoheadrightarrow_i M'$. Ali početni redeks terma M je takodje početni redeks terma $\lambda x.M$ i obrnuto, tako da $\lambda x.M \twoheadrightarrow_h \lambda x.N \twoheadrightarrow_i \lambda x.M'$, odakle sledi da

$$\lambda x.M \in \mathcal{S}. \diamond$$

Ponovo, primetimo da osobina $CLO^+(\mathcal{S})$ ne može biti dokazana bez η-redukcije.

Tvrdjenje 4.4.12 *Neka je dato $M \in \Lambda$. Ako postoji baza Γ i tip $\varphi \in$ $\texttt{type}^\omega \setminus \{\omega\}$ takvi da $\Gamma \vdash^\omega M : \varphi$, tada $M \in \mathcal{S}$.*

Dokaz. Na osnovu Tvrdjenja 4.1.21(ii)2 i Lema 4.4.9, 4.4.10 i 4.4.11. $\diamond$

Kao važnu posledicu Tvrdjenja 4.4.12 dobijamo standardizaciju u skupu Λ. Kao i u slučaju konfluencije, i ovde ćemo najpre dokazati analognu pomoćnu lemu.

Lema 4.4.13 *Neka $M \in \Lambda$. Tada:*

$$\lambda x.M \in \mathcal{S} \Rightarrow M \in \mathcal{S}.$$

Dokaz. Jedini način da se redukuje početni redeks terma $\lambda x.M$ je redukcija početnog redeksa terma M. Dakle, standardna redukcija terma $\lambda x.M$ je standardna reduckcija terma M, što znači da $M \in \mathcal{S}$. $\diamond$

Posledica 4.4.14 (Standardizacija u Λ) *Ako $M \in \Lambda$, tada $M \in \mathcal{S}$.*

Dokaz. Analognim zaključivanjem kao u dokazu Posledice 4.4.7, dolazimo do zaključka da na osnovu Tvrdjenja 4.4.12 sledi da $\lambda x.M \in \mathcal{S}$. Na osnovu Leme 4.4.13 sledi da $M \in \mathcal{S}$. $\diamond$

4.4.3 Konačnost razvoja u Λ

Podsetimo se najpre nekih oznaka i pojmova koji će nam biti potrebni da dokažemo Teoremu o konačnosti razvoja. Pre svega, potreban nam je pojam *označenog lambda terma*. Ako $M \in \Lambda$, tada se označen lambda term M^* dobija od M označavajući sve redekse u M. Teorema o konačnosti razvoja tvrdi da svi označeni lambda termi imaju osobinu jake normalizacije.

Definišimo najpre alfabet koji ćemo koristiti.

Definicija 4.4.15 *1. Prebrojiv skup promenljivih* $\mathcal{V} = \{x, y, z, x_1, \ldots\}$*;*

2. lambde $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$*;*

3. operacija aplikacije $\cdot$*;*

4. zagrade $(,)$.

Skup Λ^* svih *označenih lambda terma* se tada induktivno definiše.

Definicija 4.4.16 *1.* $x \in \mathcal{V} \Rightarrow x \in \Lambda^*$*;*

2. $M \in \Lambda^*,\ x \in \mathcal{V} \Rightarrow (\lambda x.M) \in \Lambda^*$*;*

3. $M, N \in \Lambda^* \Rightarrow (MN) \in \Lambda^*$*;*

4. $M, N \in \Lambda^* \Rightarrow ((\lambda_i x.M)N) \in \Lambda^*$*, za sve* $i \in \mathbf{N}$.

Termi oblika $(\lambda_i x.M)N$ se nazivaju *označeni redeksi.*

Uvedimo zatim pojam redukcije na ovim termima. Supstitucija se definiše na uobičajen način. Redukcija na označenim lambda termima se naziva β_0-redukcija i definisana je sa

$$(\lambda_i x.M)N \underset{\beta_0}{\rightarrow} M[x := N].$$

Dalje, definišimo skup $\mathcal{F}$ svih lambda terma za koje označeni termi imaju osobinu jake normalizacije. Za skup $\mathcal{F}$ ćemo pokazati da važe osobine $VAR(\mathcal{F}, \mathcal{F})$, $SAT(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ i $CLO(\mathcal{F})$. Teorema o konačnosti razvoja je onda direktna posledica opšteg metoda redukcije pokazanog u prethodnom poglavlju.

Definicija 4.4.17

$$\mathcal{F} = \{M \in \Lambda \mid M^* \in \mathcal{SN}\}.$$

Lema 4.4.18 *VAR*$(\mathcal{F}, \mathcal{F})$.

Dokaz. Neka $x \in \mathtt{var}$ i $M_1, \ldots, M_n \in \mathcal{F}$. Tada $M_1^*, \ldots, M_n^*$ imaju osobinu jake normalizacije, odnosno $M_1^*, \ldots, M_n^* \in \mathcal{SN}$. Posmatraćemo term $P \equiv xM_1 \ldots M_n$ i pokazati da $P^* \in \mathcal{SN}$. Označeni redeksi terma P su zapravo jedino označeni redeksi terma $M_1, \ldots, M_n,\ 1 \leq i \leq n$, odnosno $P^* = xM_1^* \ldots M_n^*$. Kako je jedini način da se redukuje term P zapravo redukcija označenih redeksa terma $M_i^*,\ 1 \leq i \leq n$, a redukcije $M_i^* \twoheadrightarrow_{\beta_0} M_i'$ su konačne, dobijamo da je konačna i redukcija $P \twoheadrightarrow_{\beta_0} xM_1' \ldots M_n'$, što znači da $P \in \mathcal{F}$. $\diamond$

Lema 4.4.19 *SAT*$(\mathcal{F}, \mathcal{F})$.

Dokaz. Neka $M, N, M_1 \ldots M_n \in \mathcal{F}$ i $M[x := N]M_1 \ldots M_n \in \mathcal{F}$. Tada $M^*, N^*, M_1^* \ldots M_n^* \in \mathcal{SN}$ i $(M[x := M]M_1 \ldots M_n)^* \in \mathcal{SN}$. Potrebno je pokazati da za $P \equiv (\lambda x.M)NM_1 \ldots M_n$, važi $P^* \in \mathcal{SN}$. Uočimo najpre da je $P^* = (\lambda_0 x.M^*)N^*M_1^* \ldots M_n^*$. Pretpostavimo da postoji beskonačna redukcija od P. Pošto početni redeks mora biti označen, on mora biti redukovan. Dakle, posle odredjenog broja koraka dobijamo:

$$(\lambda_0 x.M^*)N^*M_1^* \ldots M_n^* \underset{\beta_0}{\twoheadrightarrow} (\lambda_0 x.M')N'M_1' \ldots M_n' \underset{\beta_0}{\rightarrow} M'[x := N']M_1' \ldots M_n',$$

gde se termi $M', N', M_i',\ 1 \leq i \leq n$ dobijaju od terma $M^*, N^*, M_i^*,\ 1 \leq i \leq n$ redom, redukujući označene redekse, odnosno

$$M^* \underset{\beta_0}{\twoheadrightarrow} M',\ N^* \underset{\beta_0}{\twoheadrightarrow} N' \ \text{ i } M_i^* \underset{\beta_0}{\twoheadrightarrow} M_i',\ 1 \leq i \leq n.$$

Odavde sledi da term $M'[x := N']M_1' \ldots M_n'$ može biti beskonačno redukovan, a samim tim beskonačno redukovan može biti i term $M^*[x := N^*]M_1^* \ldots M_n^*$, jer $M^*[x := N^*]M_1^* \ldots M_n^* \twoheadrightarrow_{\beta_0} M'[x := N']M_1' \ldots M_n'$. Kako je

$$(M[x := N]M_1 \ldots M_n)^* = M^*[x := N^*]M_1^* \ldots M_n^*,$$

dobijamo kontradikciju sa činjenicom da $(M[x := N]M_1 \ldots M_n)^* \in \mathcal{SN}$. $\diamond$

Lema 4.4.20 (*CLO*$(\mathcal{F})$**)** $M \in \mathcal{F} \Rightarrow \lambda x.M \in \mathcal{F}$.

Dokaz. Pretpostavimo da $M \in \mathcal{F}$. Tada $M^* \in \mathcal{SN}$. Posmatrajmo term $\lambda x.M$. Uočimo da $(\lambda x.M)^* = \lambda x.M^*$ pošto ova apstrakcija ne formira nove označene redekse osim onih već postojećih u M. Kako $M^* \in \mathcal{SN}$ sledi da $\lambda x.M^* \in \mathcal{SN}$, odnosno

$$\lambda x.M \in \mathcal{F}. \diamond$$

Tvrdjenje 4.4.21 *Neka je dato $M \in \Lambda$. Ako postoji baza Γ i tip $\varphi \in$ $\mathtt{type}^{\omega} \setminus \{\omega\}$ takvi da $\Gamma \vdash^{\omega} M : \varphi$, tada $\mathcal{SN}(\beta_0)$.*

Dokaz. Na osnovu Tvrdjenja 4.1.21(i)2 i Lema 4.4.18, 4.4.19 i 4.4.20. $\diamond$

Još jedna teorema koja važi u celom skupu Λ se dobija kao posledica Tvrdjenja 4.4.21, a to je konačnost razvoja. Dokažimo najpre jednu pomoćnu lemu.

Lema 4.4.22 *Neka $M \in \Lambda$. Tada:*

$$\lambda x.M \in \mathcal{F} \Rightarrow M \in \mathcal{F}.$$

Dokaz. Pretpostavimo da $\lambda x.M \in \mathcal{F}$. Tada $(\lambda x.M)^* = \lambda x.M^* \in \mathcal{SN}$. Kako je jedini način da se redukuje $\lambda x.M^*$ redukcija terma M^*, dobijamo da se term M^* ne može beskonačno redukovati. Dakle, $M^* \in \mathcal{SN}$, odnosno $M \in \mathcal{F}$ $\diamond$.

Posledica 4.4.23 (Konačnost razvoja) *Ako $M \in \Lambda$, tada $M^* \in \mathcal{SN}$.*

Dokaz. Za svako $M \in \Lambda$, term $\lambda x.M$ je term koji ima slabu početnu normalnu formu, odnosno $\lambda x.M \in \mathcal{W}$. Za ovaj term postoji baza Γ takva da $\Gamma \vdash^{\omega} \lambda x.M : \omega \to \omega$. Na osnovu Tvrdjenja 4.4.21 sledi da $\lambda x.M \in \mathcal{F}$. Na osnovu Leme 4.4.22 sledi da $M \in \mathcal{F}$. $\diamond$

4.5 Opšti metod redukcije za osnovni tipski sistem $\lambda\!\to$

Osnovni tipski sistem $\lambda\!\to$ je proširen tipovima sa presekom da bi se mogla okarakterisati veća klasa terma. Zbog toga, ovaj sistem se može posmatrati kao restrikcija tipskog sistema sa presekom $\lambda\cap$.

Definicija 4.5.1 *Skup tipova* $\mathtt{type}$ *se definiše na sledeći način:*

1. *$V = \{\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \ldots\} \subset \mathtt{type}$ (V je prebrojiv skup iskaznih promenljivih);*

2. *Ako $\sigma, \tau \in \mathtt{type}$, onda $(\sigma \to \tau) \in \mathtt{type}$;*

Definicija 4.5.2 *Osnovni tipski sistem $\lambda\!\rightarrow$ je definisan sledećim pravilima:*

$$(ax) \qquad \Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma$$

$$(\rightarrow E) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau}$$

$$(\rightarrow I) \qquad \frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash (\lambda x.M) : \sigma \rightarrow \tau}$$

U ovom sistemu, opšti postupak redukcije se takodje može primeniti. Sve osobine dokazane u Odleljcima 4.3, 4.2.4 i 4.4 važe za osnovni tipski sistem $\lambda\!\rightarrow$.

Glava 5

Primena tipova sa presekom i metoda redukcije

U ovom delu su dati primeri primene tipova sa presekom i metoda redukcije. U prvom poglavlju je pokazano kako se tipovi sa presekom mogu iskoristiti da bi se konstruisali lambda modeli koji karakterišu grupe lambda terma sa odredjenim osobinama. Analiziran je rad ”A lambda model characterizing computational behaviours of terms” (Dezani i Ghilezan [12]) kao jednostavniji primer, dok se složenija analiza može naći u Dezani i dr. [13]. U drugom poglavlju je analiziran rad ”Intersection types and computational effects” (Davis i Pfenning [11]).

5.1 Karakterizacija ponašanja lambda terma pomoću lambda modela

Metod redukcije je dobro poznat metod koji se koristi za dokazivanje raznih osobina lambda terma. U većini dosadašnjih radova, razne osobine se karakterišu u raznim tipskim sistemima. Medjutim odredjene osobine lambda terma se mogu okarakterisati u jedinstvenom tipskom sistemu koji definiše lambda model $\mathcal{D}_\infty$. U ovom radu [12] posmatrani su lambda termi koji imaju osobinu normalizacije, početne normalizacije, slabe početne normalizacije i njihove perzistentne verzije. Za ove skupove lambda terma je moguće konstruisati lambda model koji u potpunosti karakteriše navedene osobine lambda terma. Ovde je konstruisan inverzni lambda model $\mathcal{D}_\infty$, u kojem za svaki od navedenih skupova lambda terma, postoji odgovarajući elemenat u modelu takav da term pripada skupu ako i samo ako je njegova interpretacija veća ili jednaka tom elementu.

Ovo se može pokazati pomoću konačnog logičkog opisa modela $\mathcal{D}_\infty$, koji se dobija definisanjem tipskog sistema sa presekom na sledeći način. Najpre se konstruiše skup tipova `type` koji su generisani od osnovnih tipova koji odgovaraju elementima iz $\mathcal{D}_0$, zatvarajući ih sa strelicom $\rightarrow$ i presekom $\cap$. Zatim se definiše skup filtera F na skupu `type`. Skup filtera F i inverzni model $\mathcal{D}_\infty$ su izomorfni kao ω-algebarske mreže. Dakle, term pripada jednom od pomenutih skupova lambda terma ako i samo ako ima odredjeni tip u datom tipskom sistemu.

Definišimo najpre tipski sistem koji se koristi.

Definicija 5.1.1 (Skup tipova `type`) *Skup tipova se definše na sledeći način:*

$$\texttt{type} \;=\; \nu \mid \hat{\nu} \mid \mu \mid \hat{\mu} \mid \Omega \mid \texttt{type} \rightarrow \texttt{type} \mid \texttt{type} \cap \texttt{type}$$

Definišimo zatim skupove lambda terma koji su posmatrani.

Definicija 5.1.2

1. *Term M ima osobinu normalizacije, $M \in \mathcal{N}$, ako se M redukuje na normalnu formu;*
2. *Term M ima osobinu početne normalizacije, $M \in \mathcal{HN}$, ako se M redukuje na term oblika $\lambda\overrightarrow{x}.y\overrightarrow{M}$ gde y može da se pojavi u $\overrightarrow{x}$;*
3. *Term M ima osobinu slabe početne normalizacije, $M \in \mathcal{WN}$, ako se M redukuje do apstrakcije ili do terma koji počinje slobodnom promenljivom;*
4. *Term M ima osobinu perzistentne normalizacije, $M \in \mathcal{PN}$, ako $M\overrightarrow{N} \in N$ za sve terme $\overrightarrow{N} \in \mathcal{N}$;*
5. *Term M ima osobinu perzistentne početne normalizacije, $M \in \mathcal{PHN}$, ako $M\overrightarrow{N} \in \mathcal{HN}$ za sve terme $\overrightarrow{N}$;*
6. *Term M ima osobinu perzistentne slabe početne normalizacije, $M \in \mathcal{PWN}$, ako $M\overrightarrow{N} \in \mathcal{WN}$ za sve terme $\overrightarrow{N}$.*

Tvrdjenje 5.1.3 *Medju datim skupovima lambda terma važe sledeće striktne inkluzije:*

$$\begin{array}{lllllllll}
\mathcal{PN} & \subsetneq & \mathcal{N} & \subsetneq & \mathcal{HN} & \subsetneq & \mathcal{WN} & \subsetneq & \Lambda \\
\mathcal{PN} & \subsetneq & \mathcal{PHN} & \subsetneq & \mathcal{PWN} & \subsetneq & \mathcal{WN} & & \\
\mathcal{PHN} & \subsetneq & \mathcal{HN}. & & & & & &
\end{array}$$

Odnos medju datim skupovima se može grafički prikazati na sledeći način:

$$\begin{tikzcd}
& \Lambda & & \\
& \mathcal{WN} \arrow[u] & & \\
\mathcal{PWN} \arrow[ur] & & \mathcal{HN} \arrow[ul] & \\
& \mathcal{PHN} \arrow[ul] \arrow[ur] & & \mathcal{N} \arrow[ul] \\
& & \mathcal{PN} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Neka su $n, \hat{n}, h, \hat{h}$ elementi modela $\mathcal{D}_0$ koji odgovaraju redom skupovima $\mathcal{N}, \mathcal{PN}, \mathcal{HN}, \mathcal{PHN}$.

Potrebno je diskutovati funkcionalno ponašanje terma koji pripadaju ovim skupovima, pogotovo u odnosu na "step" funkciju $a \Rightarrow b$ definisanu sa:

$$\lambda d.\ \text{ako } a \sqsubseteq d \text{ tada } b \text{ inače } \perp.$$

Analizom ponašanja terma iz ovih skupova, dolazi se do sledeće definicije.

Definicija 5.1.4 *Neka je mreža $\mathcal{D}_0$ data kao na slici.*

$$\begin{tikzcd}
& \hat{n} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\hat{h} \arrow[dr] & & n \arrow[dl] \\
& h \arrow[d] & \\
& \perp &
\end{tikzcd}$$

Neka je $\mathcal{D}_\infty$ inverzni lambda model koji se dobija na sledeći fnačin. Za $\mathcal{D}_0$ uzmimo mrežu sa slike, za $\mathcal{D}_1$ mrežu $[\mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_0]_\perp$. Zatim definišimo projekciju $i_0 : \mathcal{D}_0 \to [\mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_0]_\perp$ na sledeći način:

$$i_0(\hat{n}) = (\perp \Rightarrow \hat{h}) \sqcup (n \Rightarrow \hat{n}),\ i_0(n) = (\hat{h} \Rightarrow h) \sqcup (\hat{n} \Rightarrow n),$$

$$i_0(\hat{h}) = \perp \Rightarrow \hat{h},\ i_0(h) = \hat{h} \Rightarrow h,\ i_0(\perp) = \perp.$$

Teorema 5.1.5 (Osnovna teorema, I) *Neka je $\mathcal{D}_\infty$ inverzni model definisan u Definiciji 5.1.4 i neka je $\rho_{\hat{n}}$ okolina definisana sa $\rho_{\hat{n}}(x) = \hat{n}$ za sve $x \in$ Var. Tada:*

1. $M \in \mathcal{PN}$ *ako i samo ako* $[\![M]\!]^{\mathcal{D}_\infty}_{\rho_{\hat{n}}} \sqsupseteq \hat{n}$;
2. $M \in \mathcal{N}$ *ako i samo ako* $[\![M]\!]^{\mathcal{D}_\infty}_{\rho_{\hat{n}}} \sqsupseteq n$;
3. $M \in \mathcal{PHN}$ *ako i samo ako* $[\![M]\!]^{\mathcal{D}_\infty}_{\rho_{\hat{n}}} \sqsupseteq \hat{h}$;
4. $M \in \mathcal{HN}$ *ako i samo ako* $[\![M]\!]^{\mathcal{D}_\infty}_{\rho_{\hat{n}}} \sqsupseteq h$;
5. $M \in \mathcal{PWN}$ *ako i samo ako* $[\![M]\!]^{\mathcal{D}_\infty}_{\rho_{\hat{n}}} \sqsupseteq \bigsqcup_{n\in\mathbf{N}} \underbrace{\bot \Rightarrow \ldots \Rightarrow \bot}_{n} \Rightarrow \bot)$;
6. $M \in \mathcal{WN}$ *ako i samo ako* $[\![M]\!]^{\mathcal{D}_\infty}_{\rho_{\hat{n}}} \sqsupseteq \bot \Rightarrow \bot$.

Definicija 5.1.6 (Preslikavanje m) *Preslikavanje $m : T \to \mathcal{D}_\infty$ se definiše na sledeći način:*

$$m(\nu) = n \quad m(\hat{\nu}) = \hat{n} \quad m(\mu) = h \quad m(\hat{\mu}) = \hat{h} \quad m(\Omega) = \bot$$

$$m(\sigma \to \tau) = m(\sigma) \Rightarrow m(\tau) \quad m(\sigma \cap \tau) = m(\sigma) \sqcup m(\tau)$$

Definicija 5.1.7 (Skup filtera F)

1. Filter *je skup $X \subseteq$ `type` takav da:*
   (a) $\Omega \in X$;
   (b) *Ako $\sigma \leq \tau$ i $\sigma \in X$, tada $\tau \in X$;*
   (c) *Ako $\sigma, \tau \in X$, tada $\sigma \cap \tau \in X$;*
2. *F označava skup filtera na skupu* `type`;
3. *Ako $X \subseteq$ `type`, $\uparrow X$ označava filter generisan sa X;*
4. *Filter je* osnovni *ako je oblika $\uparrow \{\sigma\}$, za neki tip σ, u oznaci $\uparrow \{\sigma\}$ ili $\uparrow \sigma$.*

Skup filtera F, uredjen skupovnom inkluzijom, je ω-algebarska kompletna mreža.

Koristeći preslikavanje m, može se pokazati da su F i $\mathcal{D}_\infty$ izomorfni do na filtere tipova koji se mogu izvesti u datom tipskom sistemu.

Teorema 5.1.8 (Izomorfizam) *Preslikavanje $m^* : F \to \mathcal{D}_\infty$ definisano sa*

$$m^*(X) = \bigsqcup_{\sigma \in X} m(\sigma)$$

je izomorfizam izmedju mreža F i $\mathcal{D}_\infty$.

Primetimo da $m^*(\uparrow \sigma) = m(\sigma)$.

Teorema 5.1.9 (Osnovna teorema, II) *Neka je $\Gamma_{\hat{\nu}}$ baza definisana sa $\Gamma_{\hat{\nu}} = \{x : \hat{\nu} \mid \forall x \in \text{Var}\}$. Tada:*

1. *$M \in \mathcal{PN}$ ako i samo ako $\Gamma_{\hat{\nu}} \vdash M : \hat{\nu}$;*
2. *$M \in \mathcal{N}$ ako i samo ako $\Gamma_{\hat{\nu}} \vdash M : \nu$;*
3. *$M \in \mathcal{PHN}$ ako i samo ako $\Gamma_{\hat{\nu}} \vdash M : \hat{\mu}$;*
4. *$M \in \mathcal{N}$ ako i samo ako $\Gamma_{\hat{\nu}} \vdash M : \mu$;*
5. *$M \in \mathcal{PWN}$ ako i samo ako $\Gamma_{\hat{\nu}} \vdash M : \Omega^n \to \Omega$ za svako $n \in N$;*
6. *$M \in \mathcal{WN}$ ako i samo ako $\Gamma_{\hat{\nu}} \vdash M : \Omega \to \Omega$.*

Dokazi ($\Rightarrow$) delova teoreme su većinom jednostavne indukcije. Medjutim u dokazima ($\Leftarrow$) delova se koristi metod redukcije, koji je prilagodjen na taj način što se zahteva da termi koji imaju tipove navedene u Teoremi 5.1.9 pripadaju odgovarajućim skupovima.

Ovaj rad pokazuje jednu od mnogih primena tipova sa presekom i metoda redukcije. U ovom slučaju, ovaj tipski sistem je korišćen da bi se izgradio lambda model koji u potpunosti karakteriše neke važne osobine lambda terma.

5.2 Tipovi sa presekom i computational effects

Standardna formulacija tipova sa presekom nije postojana u prisustvu bočnih-efekata. U ovom radu [11] predloženo je rešenje slično restrikciji vrednosti za polimorfizam koja se koristi u Standard ML-u. Osim toga, tipski sistem može biti dopunjen sa parametarskim polimorfizmom. Ovaj sistem, i njemu odgovarajući algoritam za proveru tipova su jedan od značajnih koraka u uvodjenju tipova sa presekom u realne programske jezike. Novodobijene karakteristike omogućavaju da mnoge odlike programa uvede programer i statički proveri kompajler.

Jezik koji je posmatran je standardni "call by value" jezik sa funkcijama, promenljivim referencama i tipovima sa presekom. Uvodi se restrikcija na uvodjenje tipova sa presekom (presek se može uvesti samo ako su polazni termi vrednosti) i isključuje distributivni zakon u uvodjenju podtipova. Sintaksa je slična sintaksi jezika iz familije ML jezika:

$$\begin{array}{rrcl}
\texttt{Tipovi} & A & ::= & A_1 \to A_2 \mid A\, ref \mid unit \mid bits \mid nat \mid pos \mid A_1 \wedge A_2 \\
\texttt{Termi} & M & ::= & x \mid \lambda x.M \mid M_1 M_2 \mid let\ x = M_1\ in\ M_2 \mid u \mid fix\ u.M \\
& & & \mid l \mid ref\ M \mid !\, M \mid M_1 := M_2 \mid () \mid \epsilon \mid M\ 0 \mid M\ 1 \\
& & & \mid case\ M\ of\ \epsilon \Rightarrow M_1 \mid x\ 0 \Rightarrow M_2 \mid y\ 1 \Rightarrow M_3
\end{array}$$

Razlikujemo dve vrste promenljivih: promenljive vezane u λ, let i ref izrazima, koje predstavljaju vrednosti i označavaju se sa x, i promenljive vezane u fix izrazima koje predstavljaju proizvoljne terme i označavaju se sa u. Identifikatori, označeni sa l, se koriste za pristup ćelijama u memoriji u toku evaluacije preograma.

Vrednosti se definišu kao:

$$\texttt{Vrednosti}\ V \quad ::= \quad x \mid \lambda x.M \mid l \mid () \mid \epsilon \mid V\ 0 \mid V\ 1$$

Zbog provere tipova, potrebno je dodeliti tipove promenljivim i ćelijama u bazama Γ i Δ. Osim toga, tokom izvršenja programa potrebno je održavati memoriju C. Dakle uvode se sledeći pojmovi.

$$\begin{array}{rrcl}
\texttt{Baze promenljivih} & \Gamma & ::= & \cdot \mid \Gamma, x : A \mid \Gamma, u : A \\
\texttt{Baze celija} & \Delta & ::= & \cdot \mid \Delta, l : A \\
\texttt{Memorija} & C & ::= & \cdot \mid C, (l = V) \\
\texttt{Programska stanja} & P & ::= & C \rhd M
\end{array}$$

Pojam podtipa i relacija $\leq$ se uvode na standardan način, osim što je izbačen distributivni zakon

$$(A \to B) \wedge (A \to B') \leq A \to (B \wedge B')$$

koji dovodi do nepostojanosti kada funkcije uključuju bočne efekte.

Zatim se umesto uobičajene relacije poretka $\leq$ na skupu tipova, uvodi relacija algoritamskog podtipa $\trianglelefteq$ i može se pokazati da

$$A \leq B \text{ ako i samo ako } A \trianglelefteq B.$$

Izraz

$$\Delta; \Gamma \vdash M : A$$

označava da term M ima tip A u bazi ćelija Δ i bazi promenljivih Γ.

Dodeljivanje tipova je standardno za funkcije, reference i tipove sa presekom, sa ograničenjem uvodjenja preseka na vrednosti. Za ovaj sistem ne postoje osnovni tipovi.

Dodeljivanje tipova programskim stanjima se definiše izrazom

$$\vdash (C \triangleright M) : (\Delta \triangleright A),$$

i znači da stanje $(C \triangleright M)$ zadovoljava bazu ćelija Δ i tip A.

$(C \triangleright M) \mapsto (C' \triangleright M')$ označava jedan korak u evaluaciji programa, pri čemu su pravila redukcije data sa:

$$\begin{array}{rcl}
C \triangleright E[(\lambda x.M)V] & \mapsto & C \triangleright E[\{V/x\}M] \\
C \triangleright E[let\ x = V in\ M] & \mapsto & C \triangleright E[\{V/x\}M] \\
C \triangleright E[fix\ u.M] & \mapsto & C \triangleright E[\{fix\ u.M/u\}M] \\
C \triangleright E[(ref\ V)] & \mapsto & C, (l = V) \triangleright E[l] \\
C_1, (l = V), C_2 \triangleright E[!l] & \mapsto & C_1, (l = V), C_2 \triangleright E[V] \\
C_1, (l = V_1), C_2 \triangleright E[l := V_2] & \mapsto & C_1, (l = V_2), C_2 \triangleright E[()] \\
C \triangleright E[case\ \epsilon\ of\ \epsilon \Rightarrow M_1 \mid x\ 0 \Rightarrow M_2 \mid y\ 1 \Rightarrow M_3] & \mapsto & C \triangleright E[M_1] \\
C \triangleright E[case\ V\ 0\ of\ \epsilon \Rightarrow M_1 \mid x\ 0 \Rightarrow M_2 \mid y\ 1 \Rightarrow M_3] & \mapsto & C \triangleright E[\{V/x\}M_2] \\
C \triangleright E[case\ V\ 1\ of\ \epsilon \Rightarrow M_1 \mid x\ 0 \Rightarrow M_2 \mid y\ 1 \Rightarrow M_3] & \mapsto & C \triangleright E[\{V/x\}M_3]
\end{array}$$

Moguće je dokazati sledeću teoremu.

Teorema 5.2.1 (Teorema o progresu i očuvanju tipova) *Ako* $\vdash (C \triangleright M) : (\Delta \triangleright A)$ *tada važi jedno od sledećih tvrdjenja:*

1. M *je vrednost;*

2. $(C \triangleright M) \mapsto (C' \triangleright M')$ *za neke* C', M' *i* Δ' *koji zadovoljavaju* $\vdash (C' \triangleright M') : (\Delta, \Delta' \triangleright A)$.

Ova teorema ne važi ako se ne uvede ograničenje na uvodjenje preseka.

Za ovaj sistem je moguće konstruisati bi-direkcioni algoritam za proveru tipova koji je valjan u odnosu na malo modifikovan tipski sistem.

Parametarski polimorfizam može biti dodat posmatrajući ga kao beskonačnu analogiju polimorfizmu sa presekom. Dakle, tipovima se dodaju tipske promenljive i univerzalni kavantifikator, α i $\forall\alpha.A$, redom. Uvodi se restrikcija na uvodjenje polimorfizma. Opet se isključuje distributivni zakon

$$\forall\alpha.(A \to B) \leq A \to \forall\alpha.B.$$

I u ovom slučaju može se dokazati da $A \leq B$ ako i samo ako $A \trianglelefteq B$ i Teorema o progresu i očuvanju tipova.

Uvodjenjem tipova sa presekom u programske jezike, omogućava se dodeljivanje tipova većoj kolekciji programa, jer tipovi sa presekom mogu predstaviti više odlika programa u isto vreme. Varijanta tipova sa presekom, poznata kao "refinment types", omogućava lakše otrkivanje programerskih grešaka, i već se koristi u proveri tipova u ML-u.

Glava 6

Zaključak

U radu je analiziran opšti metod redukcije u lambda računu sa tipovima i njegova primena na dokaze nekih važnih osobina lambda terma sa tipovima sa presekom.

Na početku rada je dat uvod u lambda račun bez tipova, osnovni pojmovi, sintaksa, relacije redukcije i osnovne teoreme. Zatim su navedeni osnovni pojemovi i osobine lambda računa sa tipovima i tipskih sistema. Osim toga, dat je kratak osvrt na teoriju kombinatora.

Zatim je analizirana osobina jake normalizacije i tipiziranje terma u različitim tipskim sistemima sa presekom. Pokazano je da term ima osobinu jake normalizacije ako i samo ako ima tip u sistemima $\mathcal{D}$ i $\lambda\cap$.

Najznačajniji doprinos rada je razvoj opšteg postupka redukcije u lambda računu sa tipovima i njegova primena na dokaze nekih važnih osobina lambda terma sa tipovima sa presekom. Tipovi se interpretiraju kao odgovarajući skupovi lambda terma koji zadovoljavaju odgovarajuće osobine.

Razlikujemo dve različite vrste interpretacije tipova u odnosu na dati skup $\mathcal{P} \subseteq \Lambda$ u odsustvu η-redukcije i dve različite vrste uslova koje dati skup $\mathcal{P} \subseteq \Lambda$ treba da zadovoljava. Kombinujući različite interpretacije tipova sa odgovarajućim uslovima za skup $\mathcal{P} \subseteq \Lambda$ dobija se semantika i može se dokazati valjanost u oba slučaja.

Primena kompletnog metoda dovodi do dokaza postojanja normalne forme, jedinstvenosti normalne forme, konačnosti redukcije sa leve strane i jake normalizacije u sistemu $\lambda\cap$. Metod sa jačim uslovima za $\mathcal{P}$ i odgovarajućom interpretacijom tipova je primenjen u dokazu konfluencije $\beta\eta$-redukcije i jedinstvenosti $\beta\eta$-normalne forme u sistemu $\lambda\cap$. Metod sa slabijim uslovim za $\mathcal{P}$ i odgovarajućom jakom interpretacijom tipova je primenjen na dokaz konfluencije β-redukcije, standardizacije i konačnosti razvoja u sistemu $\lambda\cap\Omega$ i u celom skupu Λ.

Na kraju su pokazane neke od primena tipova sa presekom.

Analiza lambda računa, sa i bez tipova, je samo jedan deo sveta teoretskog računarstva, oblasti vrlo važne za razvoj kako matematike, tako i računarske tehnike. Pomoću lambda računa, mnogi koncepti se mogu proučavati u svojoj najosnovnijoj formi.

Lambda račun je moguće proširiti različitim sintaktičkim izrazima koji služe za modeliranje raznih karakteristika programskih jezika (pogledati [6, 5, 7, 30]). Samim tim je potrebno proširiti postojeće tipske sisteme kako bi se mogli dodeliti tipovi svim postojećim izrazima u računu. Tako se dobija moćna osnova za razumevanje semantike programskih jezika i njihov dalji razvoj zasnovan na matematičkim osnovama.

Literatura

[1] Amadio, R.M. i Curien, P.L.: Domains and lambda calculi. Cambridge University Press, Cambridge (1998).

[2] Barendregt, H.P.: The Lambda Calculus - Its Syntax and Semantics. North-Holland, Amsterdam (1984).

[3] Barendregt, H.P.: Lambda calculi with types. U: Abramsky, S., Gabbay, D.M., Maibaum, T.S.E. (eds.): *Handbook of Logic in Computer Science,* Vol. 2. Oxford University Press, Oxford (1992) 117–309.

[4] Barendregt, H.P., Coppo, M. i Dezani-Ciancaglini, M.: A filter model and the completeness of type assignment. *Journal of Symbolic Logic* 48 (1983) 931–940.

[5] Bettini, L., Bono, V. i Likavec, S.: A Core Calculus of Mixin-Based Incomplete Objects. *Proceedings of the 11th International Workshop on Foundations of Object-Oriented Languages (FOOL 11)*, Venice, Italy (2004) 29–41.

[6] Bettini, L., Bono, V. i Likavec, S.: A Core Calculus of Higher-Order Mixins and Classes. *Post-Proceedings of International Workshop TYPES'03 (Selected Papers) Lecture Notes in Computer Science* 3085 (2004) 83–98.

[7] Bettini, L., Bono, V. i Likavec, S.: Safe and Flexible Objects. *Proceedings of the OOPS track at the 20th Annual ACM Symposium on Applied Computing (SAC'05)*, Santa Fe, New Mexico, ACM Press, New York (2005) 1258–1263.

[8] Coppo, M., Dezani-Ciancaglini, M.: An extension of the basic functionality theory for the λ-calculus. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 21(4) (1980) 685–693.

[9] Coppo, M., Dezani-Ciancaglini, M. i Venneri, B.: Principal type schemes and $\lambda-$calculus semantics. U [34] 535–560.

[10] Coppo, M., Dezani-Ciancaglini, M. i Venneri, B.: Functional characters of solvable terms. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* 27 (1981) 45–58.

[11] Davis, R. i Pfenning, F.: Intersection types and computational effects. *Proceedings of the International Conference on Functional Programming (ICFP 2000)*, Montreal, Canada (2000) 198–208.

[12] Dezani-Ciancaglini, M i Ghilezan, S.: A lambda model characterizing computational behaviours of terms. *Invited talk at The International Workshop on Rewriting in Proof and Computation (RPC'01)*, Sendai, Japan (2001) 100–118.

[13] Dezani-Ciancaglini, M, Ghilezan, S. i Likavec, S.: Behavioural inverse limit lambda models. *Theoretical Computer Science* 316(1) (2004) 49–74.

[14] Dezani-Ciancaglini, M., Ghilezan, S. i Venneri, B.: The "relevance" of intersection and union types. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 38 (1997) 246–269.

[15] Dezani-Ciancaglini, M., Honsell, F. i Motohama, Y.: Compositional Characterizations of λ-terms using Intersection Types. *Proceeding of the 25th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 2000)*, Bratislava, Slovakia *Lecture Notes in Computer Science* 1893 (2000) 304–313.

[16] Gallier, J.: Typing untyped λ-terms, or reducibility strikes again! *Annals of Pure and Applied Logic* 91 (1998) 231–270.

[17] Ghilezan, S.: Intersection types in lambda calculus and logic. Doktorska teza, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu (1993).

[18] Ghilezan, S.: Strong normalization and typability with intersection types. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 37 (1996) 44–53.

[19] Ghilezan, S.: Full Intersection Types and Topologies in Lambda Calculus. *Journal of Computer and System Sciences* (2001) 1–14.

[20] Ghilezan, S., Kunčak, V. i Likavec, S.: Reducibility method for termination properties of typed lambda terms. *Proceedings of the Fifth International Workshop on Termination (WST '01)*, Utrecht, The Netherlands (2001) 14–16.

[21] Ghilezan, S. i Likavec, S.: Reducibility: a ubiquitous method in lambda calculus with intersection types. *Electronical Notes in Theoretical Computer Science* 70(1) (2003) Elsevier. http://www.elsevier.nl/locate/entcs/volume70.html

[22] Ghilezan, S. i Likavec, S.: Extensions of the reducibility method. *Proceedings of the 4th Panhellenic Logic Symposium (PLS4)*,Thessaloniki, Greece (2003) 107–112.

[23] Girard, J.-Y.: Une extension de l'interprétation de Gödel à l'analyse, et son application à l'elimination des coupures dans l'analyse et la théorie des types. U: Fenstad, J.E. (ed.): *Proceedings of the 2nd Scandinavian Logic Symposium.* North–Holland, Amsterdam (1971) 63–92.

[24] Gordon, M.J.C.: Programming Language Theory and its Implementation. Springer-Verlag, Berlin (1979).

[25] Howard, W.A.: The formulae-as-types notion of construction. U [34] 479–490.

[26] Koletsos, G.: Church-Rosser theorem for typed functionals. *Journal of Symbolic Logic* 50 (1985) 782–790.

[27] Koletsos, G. i Stavrinos, G.: The structure of reducibility proofs. U: Kolaitis, Ph., Koletsos, G. (eds.): *Proceedings of the Second Panhellenic Logic Symposium*, Delphi, Greece (1999) 138–144.

[28] Krivine, J. L.: *Lambda-calcul types et modèles.* Masson, Paris (1990).

[29] Leivant, D.: Polymorphic type inference. U: *Proceedings of the 10th ACM Symposium on Principles of Programming Languages,* Austin, Texas (1983) 88–98.

[30] Lescanne, P. i Likavec, S.: Understanding *untyped* $\bar{\lambda}\mu\widetilde{\mu}$ calculus. Tehnički izveštaj 2004-50, LIP, École Normale Supérieure de Lyon, France (2004).

[31] Mitchell, J.C.: Type Systems for Programming Languages. U: van Leeuwen, J. (ed.): *Handbook of Theoretical Computer Science,* Vol. B. Elsevire Science Publishers B.V., (1990) 415–431.

[32] Mitchell, J.C.: *Foundations for Programming Lamguages.* MIT Press (1996).

[33] Pottinger, G.: A type assignment for the strongly normalizable $\lambda-$terms. U [34] 561–577.

[34] Seldin J.P. i J.R. Hindley (eds.): To H.B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Typed Lambda Calculus and Formalism. Academic Press, London, (1980).

[35] Statman, R.: Logical relations and the simply typed lambda calculus. *Information and Control* 65 (1985) 85–97.

[36] Tait, W.W.: Intensional interpretation of functionals of finite type I. *Journal of Symbolic Logic* 32 (1967) 198-212.

[37] Tait, W.W.: A realizability interpretation of the theory of species. U: Logic Colloquium (Boston). *Lecture Notes in Mathematics,* Vol. 453. Springer-Verlag, Berlin (1975) 240-251.

[38] van Bakel, S.: Complete restrictions of the intersection type discipline. *Theoretical Computer Science* 102 (1992) 136–163.

[39] Venneri, B. (lična prepiska).