COMPITO DI RICERCA OPERATIVA

ESERCIZIO 1. (3 punti) Sia dato il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + x_3 \\ & x_1 + x_2 = 2 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1 - x_2 + x_4 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Si utilizzi il metodo due fasi (*utilizzando il minor numero possibile di variabili s nel problema di I fase*) per stabilire se questo problema ha regione ammissibile vuota oppure no.

ESERCIZIO 2. (9 punti) Sia dato il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{ll} \max & -x_1 \\ & -x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ & -x_1 + x_2 + x_4 = -2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Si risponda ai seguenti quesiti:

(1) scriverne il duale (1 punto);
(2) risolvere il duale per via grafica (2 punti);
(3) determinare la soluzione ottima del primale *utilizzando le condizioni di complementarità* (2 punti);
(4) la variabile x_2 ha coefficiente nullo nell'obiettivo del primale. Si supponga di modificare l'obiettivo con l'aggiunta di un termine cx_2, $c > 0$. Stabilire, *analizzando graficamente il duale*, qual è il massimo valore che può assumere c senza che cambi la soluzione ottima del primale e del duale (2 punti);
(5) che cosa succede nel primale per valori di c superiori rispetto a quello individuato al punto precedente? (2 punti).

ESERCIZIO 3. (5 punti) Sia dato il problema di PLI:

$$\begin{array}{ll} \max & x_2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ & -3x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in I \end{array}$$

La riformulazione rispetto alla base ottima $B^* = \{x_1, x_2\}$ del suo rilassamento lineare è la seguente:

$$\begin{array}{ll} \max & \frac{5}{2} - \frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 \\ & x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \\ & x_2 = \frac{5}{2} - \frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Si risolva il problema di PLI *utilizzando l'algoritmo branch-and-bound*. Si restituisca sia una soluzione ottima che il valore ottimo del problema.

ESERCIZIO 4. (4 punti) Si consideri il problema di PLI dell'esercizio 3. Si esegua una singola iterazione dell'algoritmo di taglio di Gomory.

ESERCIZIO 5. (5 punti) Sia dato il problema del trasporto con 2 depositi e 3 negozi in cui:

$$a_1 = 50 \quad a_2 = 20 \quad b_1 = 5 \quad b_2 = 30 \quad b_3 = 45$$

e i seguenti costi unitari di trasporto lungo gli archi:

	$N1$	$N2$	$N3$
$D1$	8	3	4
$D2$	9	3	4

Lo si risolva restituendone una soluzione ottima e il valore ottimo. Quindi, si individui almeno un'altra soluzione ottima dello stesso problema.

ESERCIZIO 6. (5 punti) Per ciascuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa *motivando la risposta*:

(1) il Teorema Fondamentale della PL stabilisce che , dato un problema di PL in forma canonica o standard, se esso ammette soluzioni ottime, queste sono tutte vertici della sua regione ammissibile;
(2) dato un problema di PL e la sua base ottima B^*, se si modifica il coefficiente nell'obiettivo di una variabile che sta fuori dalla base ottima in modo tale da non cambiare la base ottima, allora non cambiano neppure la soluzione ottima e il valore ottimo del problema;
(3) dato un problema primale e il suo duale, il valore dell'obiettivo duale nelle soluzioni ammissibili del duale è sempre strettamente maggiore del valore dell'obiettivo primale nelle soluzioni ammissibili del primale;
(4) dato un problema di PLI, se il suo rilassamento lineare ammette soluzione ottima, allora il problema di PLI ha regione ammissibile non vuota;
(5) dato un problema di PL in forma canonica o standard con obiettivo illimitato, allora la sua regione ammissibile contiene almeno un raggio estremo.

ESERCIZIO 7. (3 punti) Date 4 attività indicate con le lettere A, B, C e D, si chiede di introdurre opportune variabili e vincoli per poter modellare queste condizioni *motivando le scelte fatte*:

- se non eseguo l'attività A, allora non eseguo né l'attività B né l'attività D;
- se eseguo l'attività C, allora eseguo B e non eseguo D, oppure non eseguo B ed eseguo D (SUGGERIMENTO: per quest'ultima condizione non cercate di modellarla con un singolo vincolo ma usatene almeno due).

Soluzioni

1. È sufficiente usare una singola variabile artificiale s, impostando il problema di prima fase

$$\max\ -s$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + s && = 2 \\ & 2x_1 + x_2 \quad + x_3 && = 2 \\ & x_1 - x_2 \qquad + x_4 && = 4 \\ & x_1, \ldots, x_4, s \geq 0. \end{aligned}$$

Si ottiene quindi

$$\begin{array}{lrrrr} \max & z = & -2 & +x_1 & +x_2 \\ & s = & 2 & -x_1 & -x_2 \\ & x_3 = & 2 & -\mathbf{2}x_1 & -2x_2 \\ & x_4 = & 4 & -x_1 & +x_2 \\ & & \multicolumn{3}{c}{x_1, \ldots, x_4, s \geq 0} \end{array} \implies \begin{array}{lrrrr} \max & z = & -1 & -\frac{1}{2}x_3 & \\ & s = & 1 & +\frac{1}{2}x_3 & \\ & x_1 = & 1 & -\frac{1}{2}x_3 & -x_2 \\ & x_4 = & 3 & +\frac{1}{2}x_3 & +2x_2 \\ & & \multicolumn{3}{c}{x_1, \ldots, x_4, s \geq 0} \end{array}$$

e quindi $S_a = \emptyset$.

2. (1) Il problema duale è

$$\min\ -u_1 - 2u_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & -u_1 - u_2 \geq -1 \\ & -u_1 + u_2 \geq 0 \\ & u_1 \geq 0 \\ & u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

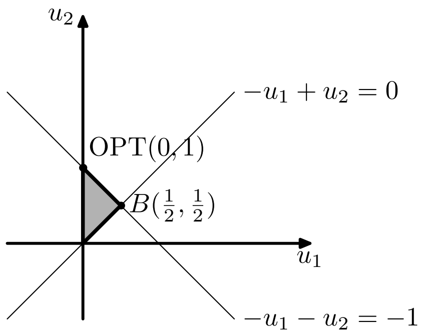

Figura 1. Regione di ammissibilità per il duale dell'esercizio 2.

(2) La regione di ammissibilità del problema duale è rappresentata in Figura 1. L'ottimo è localizzato nel punto $(u_1^* = 0, u_2^* = 1)$, con valore ottimo $z^* = -2$.
(3) Dalla soluzione ottima duale risulta

$$\begin{aligned} -u_1^* + u_2^* > 0 &\implies x_2^* = 0 \\ u_2^* > 0 &\implies x_4^* = 0 \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{array}{rl} -x_1^* + x_3^* &= -1 \\ -x_1^* \qquad &= -2 \end{array} \implies x_1^* = 2, x_3^* = 1, x_2^* = x_4^* = 0.$$

(4) Per $c \geq 0$, la retta passante per l'origine si sposta verso l'alto e il punto $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ si sposta verso nord-ovest, con coordinate $(\frac{1}{2} - \frac{c}{2}, \frac{1}{2} + \frac{c}{2})$. La funzione obiettivo calcolata in B vale $z(B) = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}c$; la soluzione trovata al punto precedente è ottima fintanto che

$$z(B) \geq -2 \iff c \leq 1.$$

(5) La regione ammissibile duale risulta vuota, la soluzione $(x_1 = 2, x_3 = 1, x_2 = x_4 = 0)$ continua ad essere ammissibile, e quindi il problema primale ha obiettivo illimitato.

3. Dal nodo radice 0 risulta $\mathrm{UB}_0 = \frac{5}{2}$, e inizialmente $\mathrm{LB} = -\infty$. Si creano i due nodi figli 1 e 2 per i quali risulta quanto segue.

Nodo 1: $x_1 \leq 0 \iff \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}x_3 + \dfrac{1}{4}x_4 \leq 0 \iff$
$-\dfrac{1}{4}x_3 + \dfrac{1}{4}x_4 + y_1 = -\dfrac{1}{2}, \quad y_1 \geq 0$

$$\begin{array}{rrrrr} \max & z = & \frac{5}{2} & -\frac{3}{4}x_3 & -\frac{1}{4}x_4 \\ & x_1 = & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}x_3 & +\frac{1}{4}x_4 \\ & x_2 = & \frac{5}{2} & -\frac{3}{4}x_3 & -\frac{1}{4}x_4 \\ & y_1 = & -\frac{1}{2} & +\mathbf{\frac{1}{4}}x_3 & -\frac{1}{4}x_4 \\ & & \multicolumn{3}{c}{x_1, \ldots, x_4, y_1 \geq 0,} \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rrrrr} \max & z = & 1 & -3y_1 & -x_4 \\ & x_1 = & 0 & -y_1 & \\ & x_2 = & 1 & -3y_1 & -x_4 \\ & x_3 = & 2 & +4y_1 & +x_4 \\ & & \multicolumn{3}{c}{x_1, \ldots, x_4, y_1 \geq 0.} \end{array}$$

Quindi $\mathrm{UB}_1 = 1$, $\mathrm{LB} = 1$; nodo chiuso per ottimalità.

Nodo 2: $x_1 \geq 1 \iff \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}x_3 + \dfrac{1}{4}x_4 \geq 1 \iff$
$-\dfrac{1}{4}x_3 + \dfrac{1}{4}x_4 - y_2 = \dfrac{1}{2}, \quad y_2 \geq 0.$

$$\begin{array}{rrrrr} \max & z = & \frac{5}{2} & -\frac{3}{4}x_3 & -\frac{1}{4}x_4 \\ & x_1 = & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}x_3 & +\frac{1}{4}x_4 \\ & x_2 = & \frac{5}{2} & -\frac{3}{4}x_3 & -\frac{1}{4}x_4 \\ & y_2 = & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}x_3 & +\mathbf{\frac{1}{4}}x_4 \\ & & \multicolumn{3}{c}{x_1, \ldots, x_4, y_2 \geq 0,} \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rrrrr} \max & z = & 2 & -x_3 & -y_2 \\ & x_1 = & 1 & & +y_2 \\ & x_2 = & 2 & -x_3 & -y_2 \\ & x_4 = & 2 & +x_3 & +4y_2 \\ & & \multicolumn{3}{c}{x_1, \ldots, x_4, y_2 \geq 0.} \end{array}$$

Quindi $\mathrm{LB} = 2$; il nodo 2 è a sua volta chiuso per ottimalità. La soluzione ottima è

$$x_1^* = 1, x_2^* = 2, x_3^* = 0, x_4^* = 2.$$

4. Il taglio di Gomory associato alla riga di x_1 è

$$\frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4 \geq \frac{1}{2} \iff \frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4 - y = \frac{1}{2},\ y \geq 0.$$

Si ottiene quindi

$$\begin{array}{rrrrr} \max & z = & \frac{5}{2} & -\frac{3}{4}x_3 & -\frac{1}{4}x_4 \\ & x_1 = & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}x_3 & +\frac{1}{4}x_4 \\ & x_2 = & \frac{5}{2} & -\frac{3}{4}x_3 & -\frac{1}{4}x_4 \\ & y = & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{4}x_3 & +\mathbf{\frac{3}{4}}x_4 \\ & & \multicolumn{3}{c}{x_1, \ldots, x_4, y \geq 0} \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rrrrr} \max & z = & \frac{7}{3} & -\frac{2}{3}x_3 & -\frac{1}{3}y \\ & x_1 = & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}x_3 & +\frac{1}{3}y \\ & x_2 = & \frac{7}{3} & -\frac{2}{3}x_3 & -\frac{1}{3}y \\ & x_4 = & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}x_3 & +\frac{4}{3}y \\ & & \multicolumn{3}{c}{x_1, \ldots, x_4, y \geq 0} \end{array}$$

5. Il problema va bilanciato inserendo un deposito fittizio $D3$ con disponibilità $a_3 = (b_1 + b_2 + b_3) - (a_1 + a_2) = 80 - 70 = 10$. Il problema diventa quindi

	$N1$	$N2$	$N3$
$D1$	8	3	4
$D2$	9	3	4
$D3$	0	0	0

Applicando il metodo dell'angolo NW e risolvendo si ottiene quanto segue.

	$N1$	$N2$	$N3$
$D1$	5^-	30	15^+
$D2$			20
$D3$	$+$		10^-

x_{ij}

	$N1$	$N2$	$N3$
$D1$	**0**	**0**	**0**
$D2$	1	0	**0**
$D3$	-4	1	**0**

$\bar{c}_{ij}$

e, cambiando di base con $\Delta = 5$,

	$N1$	$N2$	$N3$
$D1$		30	20
$D2$			20
$D3$	5		15

x_{ij}

	$N1$	$N2$	$N3$
$D1$	4	**0**	**0**
$D2$	5	0	**0**
$D3$	**0**	1	**0**

$\bar{c}_{ij}$

La base $B^* = \{x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{31}, x_{33}\}$ è ottima, con $z^* = 250$. Poiché $\bar{c}_{22} = 0$, un'altra base ottima è $B^* \cup \{x_{22}\} - \{x_{23}\}$

6. (1) Falso, perché se S_{ott} contiene più di una soluzione ottima contiene anche sicuramente infinite soluzioni ottime che non sono vertici.
(2) Vero, i valori delle variabili indotti dalla base ottima non cambiano, visto che le variabili fuori base sono tutte a zero.
(3) Falso, per i teoremi noti sulla dualità si ha uguaglianza all'ottimo dei due problemi.
(4) Falso, si consideri un esempio con regione ammissibile

$$S_a = \{x_1, x_2 \colon 2 \leq 6x_1 \leq 5, 2 \leq 6x_2 \leq 5\}$$

per la quale la corrispondente $Z_a = \emptyset$.
(5) Vero, per conseguenze del Teorema Fondamentale della PL (Lemma 1 sulle dispense).

7. Si introducano quattro variabili binarie $y_A, y_B, y_C, y_D \in \{0, 1\}$, per le quali si stabilisce che $y_i = 1$ se e solo se si esegue l'attività i.

- Se non eseguo l'attività A allora non eseguo né B né D.

  $y_B + y_D \leq 2y_A$ (alternativa: la coppia $y_B \leq y_A, y_D \leq y_A$).

- Se eseguo C, allora eseguo (B e non D) oppure (D e non B): per questo si puó scrivere la coppia

  $y_B + y_D \leq 2 - y_C,$

  $y_B + y_D \geq y_C.$