COMPITO DI RICERCA OPERATIVA

ESERCIZIO 1. (8 punti) Sia dato il seguente problema di PL:

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ & x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Lo si trasformi in forma standard (1 punto). Si determini il duale del problema in forma standard (1 punto). Si risolva il duale per via grafica (2 punti). Si calcoli la soluzione ottima del primale *utilizzando le condizioni di complementarità* (2 punti). Sulla base della risoluzione grafica dire in quale intervallo posso far variare la modifica Δb_2 del termine noto del secondo vincolo del primale senza che cambi la soluzione ottima del duale (2 punti).

ESERCIZIO 2. (6 punti) Sia dato il seguente problema di PL:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ & -x_1 + x_2 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Stabilire tramite il metodo due fasi che il problema ha regione ammissibile vuota (4 punti). Dire di quanto basta far crescere il termine noto del primo vincolo per rendere la regione ammissibile non vuota (2 punti).

ESERCIZIO 3. (5 punti) Si consideri il seguente problema di PLI:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & 2x_1 + x_3 + 2x_5 = 3 \\ & 2x_2 + x_4 - \tfrac{1}{2}x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in I \end{aligned}$$

Si applichi ad esso l'algoritmo di Gomory restituendo soluzione ottima e valore ottimo del problema.

ESERCIZIO 4. (6 punti) Ci sono 3 persone indicate con P1, P2 e P3 in grado di svolgere 4 compiti indicati con C1, C2, C3 e C4. In un'ora ciascuna delle 3 persone esegue le frazioni dei 4 compiti riporate nella tabella seguente:

	$C1$	$C2$	$C3$	$C4$
$P1$	0.15	0.05	0.1	0.05
$P2$	0.1	0.15	0.05	0.1
$P3$	0.05	0.1	0.15	0.15

Inoltre, ogni persona ha il costo per ora di lavoro riportato di seguito:

$P1$	$P2$	$P3$
8	9	10

Costruire un modello matematico per il problema di stabilire quanto tempo far lavorare ciascuna persona (sono ammesse anche frazioni di ora) in modo da completare tutti e 4 i compiti e da avere un costo totale minimo.

ESERCIZIO 5. (6 punti) Rispondere a ciascuna delle seguenti domande **motivando la risposta**:

(1) Si consideri un problema di PL in forma standard e la variabile duale associata a un suo vincolo. Se tale variabile duale ha valore nullo nella soluzione ottima del duale, è vero che modificando arbitrariamente nel vincolo del primale corrispondente a tale variabile duale il coefficiente di una qualsiasi variabile al di fuori della base ottima, la base ottima non cambia? (1 punto)

(2) Nell'algoritmo branch-and-bound i vari sottoproblemi di PLI in cui viene suddiviso quello originario (i nodi dell'albero) vengono sempre risolti restituendone una soluzione ottima o stabilendo che hanno regione ammissibile vuota? (1.5 punti)

(3) Nel metodo due fasi può accadere che il problema di I fase non abbia soluzioni ottime? (1 punto)

(4) È vero che in ogni iterazione del simplesso duale ci si trova in una base non ammissibile per il primale a meno che non ci si trovi in una soluzione ottima? (1 punto)

(5) Sia cx la funzione obiettivo di un problema di PL in forma canonica e sia r un suo raggio estremo. Se $cr > 0$ che cosa possiamo dire dell'insieme delle soluzioni ottime S_{ott} di tale problema? (1.5 punti)

ESERCIZIO 6. (3 punti) Nei problemi di trasporto si dimostri con degli esempi (possibilmente semplici) che:

a): è possibile che in una soluzione ottima un negozio riceva tutta la merce da esso richiesta dal deposito con il costo di trasporto unitario verso quel negozio più elevato rispetto a tutti gli altri;

b): è possibile che in una soluzione ottima si invii una quantità di merce nulla lungo la tratta deposito-negozio a costo di trasporto unitario più basso tra tutte.

Soluzioni

1. Il problema in forma standard è

$$\max\ z = -2x_1 + x_2 - x_3 + x_4$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ &-x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 3 \\ &x_1, \ldots, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

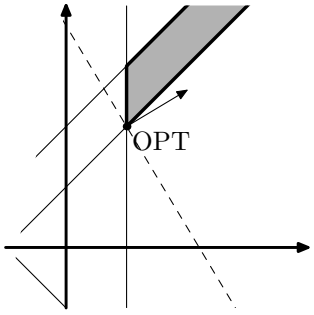
Il duale è il seguente.

$$\min\ w = 5u_1 + 3u_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &u_1 - u_2 \geq -2 \\ &-u_1 + u_2 \geq 1 \\ &u_1 + u_2 \geq -1 \\ &u_1 \geq 1 \\ &u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Dallo studio della regione duale ammissibile D_a risulta che l'ottimo è localizzato nel punto $(u_1^* = 1, u_2^* = 2)$.



Dalle condizioni di complementarietà si ottiene

$$\begin{aligned} u_1^* - u_2^* > -2 \quad &\Longrightarrow\ x_1^* = 0; \\ -u_1^* + u_2^* = 1 \quad & \\ u_1^* + u_2^* > -1 \quad &\Longrightarrow\ x_3^* = 0; \\ u_1^* = 1 \quad & \\ u_2^* > 0 \quad &\Longrightarrow\ x_5^* = 0. \end{aligned}$$

Sostituendo nei vincoli del primale, risulta che l'ottimo primale deve soddisfare

$$\begin{aligned} &-x_2^* + x_4^* = 5 \\ &x_2^* = 3 \end{aligned}$$

e quindi la soluzione ottima è $x_1^* = 0, x_2^* = 3, x_3^* = 0, x_4^* = 8, x_5^* = 0$, di costo $z^* = 11$. La direzione di crescita della funzione obiettivo duale w è data dal vettore $v = (5, 3)$; perturbare il termine noto b_2 significa far variare la seconda componente di questo vettore. Graficamente si vede che la seconda componente può scendere fino a 0 e salire illimitatamente senza compromettere l'ottimalità duale del punto $(1, 2)$. Quindi

$$-3 \leq \Delta b_2 < +\infty.$$

2. Il problema di prima fase è il seguente

$$\max\ z = -s_1 - s_2$$

soggetto a

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_2 - x_3 + s_1 = 4\\
&2x_1 + x_2 + x_4 = 2\\
&-x_1 + x_2 + s_2 = 1\\
&x_1, \dots, x_4, s_1, s_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Risolvendolo con l'algoritmo del simplesso a pertire dalla base $B = \{s_1, x_4, s_2\}$ si ottiene

$$
\begin{array}{lrrrrr}
\max & z = & -5 & +0x_1 & +2x_2 & -x_3 \\
& s_1 = & 4 & -x_1 & -x_2 & +x_3 \\
& x_4 = & 2 & -2x_1 & -x_2 & \\
& s_2 = & 1 & +x_1 & -\mathbf{1}x_2 & \\
& & x_1, \dots, x_4, s_1, s_2 \geq 0 & & &
\end{array}
\quad\Longrightarrow\quad
\begin{array}{lrrrrr}
\max & z = & -3 & -2s_2 & +2x_1 & -x_3 \\
& s_1 = & 3 & +s_2 & -2x_1 & +x_3 \\
& x_4 = & 1 & +s_2 & -\mathbf{3}x_1 & \\
& x_2 = & 1 & -s_2 & +x_1 & \\
& & x_1, \dots, x_4, s_1, s_2 \geq 0 & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrrrr}
\max & z = & -\frac{7}{3} & -\frac{4}{3}s_2 & -x_3 & -\frac{2}{3}x_4 \\
& s_1 = & \frac{7}{3} & +\frac{1}{3}s_2 & +x_3 & +\frac{2}{3}x_4 \\
& x_1 = & \frac{1}{3} & +\frac{1}{3}s_2 & & -\frac{1}{3}x_4 \\
& x_2 = & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3}s_2 & & -\frac{1}{3}x_4 \\
& & x_1, \dots, x_4, s_1, s_2 \geq 0 & & &
\end{array}
$$

Per rendere la regione ammissibile non vuota, è sufficiente portare il valore di s_1 dal valore attuale nella soluzione ottima del problema di prima fase, ovvero $\frac{7}{3}$, al valore nullo. Basta quindi ridurre il termine noto del primo vincolo esattamente di $\frac{7}{3}$ facendolo quindi passare dal valore originario 4 al valore $\frac{5}{3}$ (NB sarebbe stata ugualmente accettabile, anche se più complicata, una risposta basata sull'analisi di sensitività).

3. Come base iniziale e, in questo caso, già ottima per il rilassamento lineare, si può usare la base $B = \{x_1, x_2\}$

$$
\begin{array}{lrrrr}
\max & z = & 3 & -\frac{1}{2}x_3 & -\frac{3}{4}x_5 & -\frac{1}{2}x_4 \\
& x_1 = & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}x_3 & -x_5 & \\
& x_2 = & \frac{3}{2} & +\frac{1}{4}x_5 & & -\frac{1}{2}x_4 \\
& & x_1, \dots, x_5 \geq 0. & & &
\end{array}
$$

Il taglio generato dalla prima riga è

$$\frac{1}{2}x_3 \geq \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2}x_3 - y_1 = \frac{1}{2},\ y_1 \geq 0.$$

Si ottiene quindi

$$
\begin{array}{lrrrrr}
\max & z = & 3 & -\frac{1}{2}x_3 & -\frac{3}{4}x_5 & -\frac{1}{2}x_4 \\
& x_1 = & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}x_3 & -x_5 & \\
& x_2 = & \frac{3}{2} & & +\frac{1}{4}x_5 & -\frac{1}{2}x_4 \\
& y_1 = & -\frac{1}{2} & +\mathbf{\frac{1}{2}}x_3 & & \\
& & x_1, \dots, x_5, y_1 \geq 0 & & &
\end{array}
\quad\Longrightarrow\quad
\begin{array}{lrrrrr}
\max & z = & \frac{5}{2} & -\frac{3}{4}x_5 & -\frac{1}{2}x_4 & -y_1 \\
& x_1 = & 1 & -x_5 & & -y_1 \\
& x_2 = & \frac{3}{2} & +\frac{1}{4}x_5 & -\frac{1}{2}x_4 & \\
& x_3 = & 1 & & & +2y_1 \\
& & x_1, \dots, x_5, y_1 \geq 0 & & &
\end{array}
$$

La seconda riga genera il taglio

$$\frac{3}{4}x_5 + \frac{1}{2}x_4 \geq \frac{1}{2} \iff \frac{3}{4}x_5 + \frac{1}{2}x_4 - y_2 = \frac{1}{2},\ y_2 \geq 0.$$

$$
\begin{array}{lrrrrr}
\max & z = & \frac{5}{2} & -\frac{3}{4}x_5 & -\frac{1}{2}x_4 & -y_1 \\
& x_1 = & 1 & -x_5 & & -y_1 \\
& x_2 = & \frac{3}{2} & +\frac{1}{4}x_5 & -\frac{1}{2}x_4 & \\
& x_3 = & 1 & & & +2y_1 \\
& y_2 = & -\frac{1}{2} & +\frac{3}{4}x_5 & +\mathbf{\frac{1}{2}}x_4 & \\
& & x_1, \dots, x_5, y_1, y_2 \geq 0 & & &
\end{array}
\quad\Longrightarrow\quad
\begin{array}{lrrrrr}
\max & z = & 2 & & -y_1 & -y_2 \\
& x_1 = & 1 & -x_5 & & -y_1 \\
& x_2 = & 1 & +x_5 & & -y_2 \\
& x_3 = & 1 & & +2y_1 & \\
& x_4 = & 1 & -\frac{3}{2}x_5 & & +2y_2 \\
& & x_1, \dots, x_5, y_1, y_2 \geq 0 & & &
\end{array}
$$

4. Definendo le variabili $x_i =$ ore lavorate da P_i, si può ottenere il seguente modello.

$$\min \; z = 8x_1 + 9x_2 + 10x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
&0.15x_1 + 0.1x_2 + 0.05x_3 \geq 1\\
&0.05x_1 + 0.15x_2 + 0.1x_3 \geq 1\\
&0.1x_1 + 0.05x_2 + 0.15x_3 \geq 1\\
&0.05x_1 + 0.1x_2 + 0.15x_3 \geq 1\\
&x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 3.
\end{aligned}$$

5. Risposte.

(1) Vero. Siano i e k gli indici del vincolo e della variabile in esame. Il coefficiente di costo ridotto di x_k, perturbando il vincolo, diventa

$$\gamma'_k = \gamma_k - \underbrace{u_i}_{=0} \Delta a_{ik} = \gamma_k,$$

cioè rimane inalterato, e non compromette l'ottimalità della base.

(2) No, possono essere chiusi per bound.

(3) No. Il problema di prima fase possiede per costruzione soluzioni ammissibili; inoltre la funzione obiettivo è limitata superiormente (da 0). Quindi esiste sicuramente una soluzione ottima.

(4) Vero. Il simplesso duale mantiene ad ogni iterazione una base ammissibile duale. Se inoltre la base risulta ammissibile primale, essa è necessariamente ottima per i risultati noti sulla dualità.

(5) $S_{ott} = \emptyset$, perché la funzione obiettivo non è limitata superiormente. Se r è un raggio estremo di S_a, esiste $x \in S_a$ tale che $x + tr \in S_a$ per ogni $t \geq 0$. Allora

$$z(x + tr) = cx + t \cdot cr \to +\infty \qquad \text{per } t \to +\infty.$$

6. (a) Il caso 2×2 con

$$\begin{array}{ll} a_1 = 10, & a_2 = 20 \\ b_1 = 20, & b_2 = 10 \end{array} \qquad c_{ij} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \end{array}.$$

con base ottima $B = \{x_{12}, x_{21}, x_{22}\}$.

(b) Stesso caso ma con costi

$$c_{ij} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \end{array}.$$