COMPITO DI RICERCA OPERATIVA

ESERCIZIO 1. (7 punti) Sia dato il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{ll} \max & 5x_1 + 4x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1 + \frac{1}{3}x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Lo si risolva graficamente individuandone soluzione ottima e valore ottimo (2 punti). Dopo averlo trasformato in forma standard lo si risolva con l'algoritmo che si ritiene più opportuno (3 punti). Si identifichino graficamente i punti visitati dall'algoritmo ad ogni sua iterazione (2 punti).

ESERCIZIO 2. (5 punti) Si consideri il seguente problema di PLI:

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 \\ & x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ & 2x_1 + 6x_2 + x_4 = 7 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in I \end{array}$$

La riformulazione rispetto alla base ottima $B^* = \{x_1, x_2\}$ del suo rilassamento lineare è la seguente

$$\begin{array}{ll} \max & 2 - \frac{3}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 \\ & x_1 = 2 - \frac{3}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 \\ & x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{10}x_4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Si risolva il problema di PLI utilizzando l'algoritmo branch-and-bound restituendone una soluzione ottima e il valore ottimo.

ESERCIZIO 3. (6 punti) Sia dato il seguente problema di PL

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + x_2 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Lo si trasformi in forma standard (1 punto). Si risolva il problema con l'algoritmo che si ritiene più opportuno (2 punti). Si scriva il duale del problema in forma standard (1 punto). Si determini la soluzione ottima del duale tramite le condizioni di complementarità (2 punti)

ESERCIZIO 4. (6 punti) Sia dato il problema del trasporto con 3 depositi e 2 negozi in cui:

$$a_1 = 10 \quad a_2 = 40 \quad a_3 = 20 \quad b_1 = 20 \quad b_2 = 20$$

e i seguenti costi unitari di trasporto tra depositi e negozi:

	$N1$	$N2$
$D1$	4	8
$D2$	7	6
$D3$	5	5

Determinare una base ammissibile iniziale utilizzando la regola dell'angolo nord-ovest (1 punto). Risolvere il problema restituendone una soluzione ottima e il valore ottimo (4 punti). Stabilire se la soluzione ottima è unica oppure no (1 punto).

ESERCIZIO 5. (6 punti) Rispondere a ciascuna delle seguenti domande **motivando la risposta**:

(1) È vero o falso che il teorema fondamentale della programmazione lineare afferma che, se esistono, tutte le soluzioni ottime di un problema di PL in forma canonica (o standard) sono vertici della regione ammissibile del problema? (1.5 punti)

(2) È vero o falso che il valore ottimo del rilassamento lineare di un problema di PLI è sempre strettamente maggiore del valore ottimo del problema di PLI stesso? (1 punto)

(3) L'analisi di sensitività del coefficiente nell'obiettivo di una variabile x_i che fa parte della base ottima di un problema di PL dice che l'intervallo in cui la modifica Δc_i di tale coefficiente può variare senza che cambi la base ottima è l'intervallo $[1, 4]$. Perché tale risultato non può essere corretto? (1 punto)

(4) Dato un problema di PL, se nella riformulazione rispetto alla base B ammissibile ci sono coefficienti di costo ridotto strettamente positivi, allora possiamo concludere che la corrispondente soluzione ammissibile di base non è certamente una soluzione ottima del problema di PL? (1.5 punti)

(5) Se il duale di un problema di PL ha regione ammissibile vuota, allora il problema primale può avere soluzioni ottime? (1 punto)

ESERCIZIO 6. (3 punti) In un problema di decisione dobbiamo scegliere se attivare o meno la produzione di un certo prodotto. Nel caso si decida di attivarla si devono realizzare almeno 10000 unità di tale prodotto ma non più di 50000. Si introducano le variabili e i vincoli opportuni per modellare quanto richiesto.

Soluzioni

1. Graficamente, la soluzione ottima si trova nel vertice di coordinate ($x_1^* = \frac{8}{5}, x_2^* = \frac{6}{5}$), con valore ottimo $z^* = \frac{64}{5}$.
Il problema in forma standard si può scrivere come

$$\max 5x_1 + 4x_2$$

soggetto a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_4 = 2$$
$$x_1, \dots, x_4 \ge 0.$$

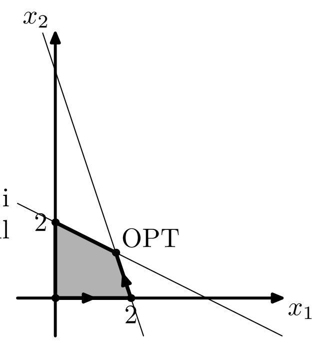
Partendo dalla base $\{x_3, x_4\}$ si ottiene

$$\begin{array}{rrrrr} \max & z = & 0 & +5x_1 & +4x_2 \\ & x_3 = & 4 & -x_1 & -2x_2 \\ & x_4 = & 2 & -\mathbf{1}x_1 & -\frac{1}{3}x_2 \\ & \multicolumn{4}{c}{x_1, \dots, x_4 \ge 0} \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rrrrr} \max & z = & 10 & -5x_4 & +\frac{7}{3}x_2 \\ & x_3 = & 2 & +x_4 & -\mathbf{\frac{5}{3}}x_2 \\ & x_1 = & 2 & -x_4 & -\frac{1}{3}x_2 \\ & \multicolumn{4}{c}{x_1, \dots, x_4 \ge 0} \end{array}$$

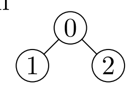
e quindi

$$\begin{array}{rrrrr} \max & z = & \frac{64}{5} & -\frac{18}{5}x_4 & -\frac{7}{5}x_3 \\ & x_2 = & \frac{6}{5} & +\frac{3}{5}x_4 & -\frac{3}{5}x_3 \\ & x_1 = & \frac{8}{5} & -\frac{6}{5}x_4 & +\frac{1}{5}x_3 \\ & \multicolumn{4}{c}{x_1, \dots, x_4 \ge 0} \end{array}$$

I punti visitati dall'algoritmo sono, nel piano (x_1, x_2), i seguenti tre vertici della regione ammissibile: l'origine, il punto $(x_1 = 2, x_2 = 0)$, il punto $(x_1 = \frac{8}{5}, x_2 = \frac{6}{5})$.



2. Il nodo radice 0 ha $\mathrm{UB}_0 = 2$; si imposta inoltre $\mathrm{LB} = -\infty$. Effettuando il branch sulla variabile x_2 si generano due nodi, 1 e 2.



Nodo 1: $x_2 \le 0 \iff \dfrac{1}{5}x_3 - \dfrac{1}{10}x_4 + y_1 = -\dfrac{1}{2}$, $y_1 \ge 0$

$$\begin{array}{rrrrr} \max & z = & 2 & -\frac{3}{5}x_3 & -\frac{1}{5}x_4 \\ & x_1 = & 2 & -\frac{3}{5}x_3 & -\frac{1}{5}x_4 \\ & x_2 = & \frac{1}{2} & +\frac{1}{5}x_3 & -\frac{1}{10}x_4 \\ & y_1 = & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{5}x_3 & +\mathbf{\frac{1}{10}}x_4 \\ & \multicolumn{4}{c}{x_1, \dots, x_4, y_1 \ge 0} \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rrrrr} \max & z = & 1 & -x_3 & -2y_1 \\ & x_1 = & 1 & -x_3 & -2y_1 \\ & x_2 = & 0 & & -y_1 \\ & x_4 = & 5 & +2x_3 & +10y_1 \\ & \multicolumn{4}{c}{x_1, \dots, x_4, y_1 \ge 0.} \end{array}$$

Il nodo 1 ha soluzione intera (di valore $>$ LB), quindi viene chiuso e si pone $\mathrm{LB} = 1$.

Nodo 2: $x_2 \ge 1 \iff \dfrac{1}{5}x_3 - \dfrac{1}{10}x_4 - y_2 = \dfrac{1}{2}$, $y_2 \ge 0$

$$\begin{array}{rrrrr} \max & z = & 2 & -\frac{3}{5}x_3 & -\frac{1}{5}x_4 \\ & x_1 = & 2 & -\frac{3}{5}x_3 & -\frac{1}{5}x_4 \\ & x_2 = & \frac{1}{2} & +\frac{1}{5}x_3 & -\frac{1}{10}x_4 \\ & y_2 = & -\frac{1}{2} & +\mathbf{\frac{1}{5}}x_3 & -\frac{1}{10}x_4 \\ & \multicolumn{4}{c}{x_1, \dots, x_4, y_1 \ge 0} \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rrrrr} \max & z = & \frac{1}{2} & -3y_2 & -\frac{1}{2}x_4 \\ & x_1 = & \frac{1}{2} & -3y_2 & -\frac{1}{2}x_4 \\ & x_2 = & 1 & +y_2 & \\ & x_3 = & \frac{5}{2} & +5y_2 & +\frac{1}{2}x_4 \\ & \multicolumn{4}{c}{x_1, \dots, x_4, y_2 \ge 0} \end{array}$$

e il nodo viene chiuso perché $\mathrm{UB}_2 \le \mathrm{LB}$. L'ottimo intero corrispone alla soluzione trovata al nodo 1.

3. Il problema in forma standard si può scrivere come

$$-\max -x_1 - x_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &-x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ &x_1 + 2x_2 + x_4 = 2 \\ &x_1, \ldots, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Applicando l'algoritmo del simplesso duale dalla base di partenza $\{x_3, x_4\}$ si ottiene

$$\begin{array}{lrrrr} \max & z = & 0 & -x_1 & -x_2 \\ & x_3 = & -1 & +\mathbf{1}x_1 & -x_2 \\ & x_4 = & 2 & -x_1 & -2x_2 \\ & \multicolumn{4}{c}{x_1, \ldots, x_4 \geq 0} \end{array} \implies \begin{array}{lrrrr} \max & z = & -1 & -x_3 & -2x_2 \\ & x_1 = & 1 & +x_3 & +x_2 \\ & x_4 = & 1 & -x_3 & -3x_2 \\ & \multicolumn{4}{c}{x_1, \ldots, x_4 \geq 0} \end{array}$$

Il duale del problema (in forma standard) è

$$\min\ -u_1 + 2u_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} &-u_1 + u_2 \geq -1 \\ &u_1 + 2u_2 \geq -1 \\ &u_1 \geq 0 \\ &u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Dalle condizioni di complementarietà primale-duale si ricava

$$\begin{aligned} x_1^* = 1 > 0 &\implies -u_1^* + u_2^* = -1 \\ x_4^* = 1 > 0 &\implies u_2^* = 0 \end{aligned}$$

e quindi $u_1^* = 1$, $u_2^* = 0$.

4. Effettuando il bilanciamento si ottiene il problema equivalente

	1	2	3	a_i
1	4	8	0	10
2	7	6	0	40
3	5	5	0	20
b_j	20	20	30	

Il metodo dell'angolo NW fornisce la base iniziale $\{(1,1), (2,1), (2,2), (2,3), (3,3)\}$, quindi si procede come segue.

	1	2	3	a_i
1	10			10
2	10^-	20	10^+	40
3	$^+$		20^-	20
b_j	20	20	30	

x_{ij}

	1	2	3
1	**0**	5	3
2	**0**	**0**	**0**
3	−2	−1	**0**

$\bar{c}_{ij}$

	1	2	3	a_i
1	10			10
2		20^-	20^+	40
3	10	$^+$	10^-	20
b_j	20	20	30	

x_{ij}

	1	2	3
1	**0**	3	1
2	2	**0**	**0**
3	**0**	−1	**0**

$\bar{c}_{ij}$

	1	2	3	a_i
1	10			10
2		10	30	40
3	10	10		20
b_j	20	20	30	

x_{ij}

	1	2	3
1	**0**	4	2
2	1	**0**	**0**
3	**0**	**0**	1

$\bar{c}_{ij}$

Avendo una base finale non degenere e costi ridotti tutti strettamente positivi, l'ottimo è unico, con $z^* = 200$.

5. Vale quanto segue.

(1) FALSO, per il teorema si può dire che ne esiste almeno una.
(2) FALSO, si può avere uguaglianza.
(3) Perché $\Delta c_i = 0$ non deve far perdere l'ottimalità.
(4) NO, la condizione $\gamma_N \leq 0$ è sufficiente per l'ottimalità ma non necessaria.
(5) NO, se il primale ha ottimo finito deve averlo anche il duale.

6. Si può introdurre una variabile binaria $y \in \{0, 1\}$ che vale 1 se la produzione è attivata, e una variabile $x \geq 0$ che indica quante unità si producono. Quindi si possono scrivere i vincoli

$$x \geq 10000y$$
$$x \leq 50000y$$