

Esercizi per il corso di ricerca operativa 1

Ultimo aggiornamento: 8 gennaio 2004

Indice

I	Esercizi	5
1	Programmazione lineare	7
2	Dualita	13
3	Analisi di sensitivita	17
4	Programmazione intera	21
5	Introduzione ai grafi	25
6	Problemi di flusso a costo minimo	27
7	Problema del massimo flusso	31
II	Soluzioni	33
1	Programmazione lineare	35
2	Dualita	49
3	Analisi di sensitivita	59
4	Programmazione intera	63
5	Introduzione ai grafi	71
6	Problemi di flusso a costo minimo	75
7	Problema del massimo flusso	81
III	Un esercizio di riepilogo	85

Parte I

Esercizi

Capitolo 1

Programmazione lineare

ESERCIZIO 1.1. Porre in forma canonica i seguenti programmi lineari.

$$\min 3x_1 + 4x_2 - 2x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - x_3 &\geq 5 \\2x_1 + 4x_3 &= 12 \\x_1 + x_2 + x_3 &\leq 15 \\x_1, x_2 &\geq 0, x_3 \text{ libera.}\end{aligned}\tag{a}$$

$$\max 4x_1 - x_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\3x_1 + x_3 &\leq 7 \\x_1 &\geq 0, x_2 \text{ libera, } x_3 \leq 0.\end{aligned}\tag{b}$$

$$\min 8x_1 - x_2 + x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned}x_1 + x_3 &\geq 4 \\x_2 - x_3 &\leq 7 \\x_1 - x_2 &\leq 2 \\x_1, x_2 &\geq 0, x_3 \leq 0.\end{aligned}\tag{c}$$

$$\max 4x_1 - x_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &\leq 2 \\2x_1 + 7x_2 &= 8 \\x_1 &\geq 0, x_2 \leq 0.\end{aligned}\tag{d}$$

$$\min 4x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4$$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 4 \\ x_2 + x_3 &\leq 7 \\ x_3 - x_4 &\leq 2 \end{aligned} \tag{e}$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_4 &= 12 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0, x_4 \text{ libera.} \end{aligned}$$

$$\max 2x_1 + 4x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 12 \\ x_1 - x_2 &\geq 2 \\ x_2 + x_3 &\leq 4 \end{aligned} \tag{f}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \text{ libera, } x_3 \leq 0.$$

ESERCIZIO 1.2. Porre in forma standard i programmi lineari dell'esercizio 1.1.

ESERCIZIO 1.3. Risolvere i seguenti programmi lineari utilizzando il metodo del simplesso.

$$\max 3x_1 + 2x_2 - 5x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 &\leq 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 1 \end{aligned} \tag{a}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

$$\max x_1 - 2x_2 + 3x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &\leq 2 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &\leq 6 \end{aligned} \tag{b}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\max 2x_1 + x_2 + 3x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 &\leq 12 \end{aligned} \tag{c}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

$$\min 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &\leq 8 \\
 -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 &\leq 4 \\
 x_1 + x_3 &\leq 10 \\
 x_1, \dots, x_4 &\geq 0.
 \end{aligned}
 \tag{d}$$

$$\max x_1 + 3x_2 - x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
 2x_1 + x_2 &\leq 3 \\
 x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 6 \\
 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 8 \\
 x_1, x_2, x_3 &\geq 0.
 \end{aligned}
 \tag{e}$$

$$\max 4x_1 + x_2 + 5x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
 -x_1 + x_2 &\leq 1 \\
 2x_2 - x_3 &\leq 2 \\
 x_1 + x_3 &\leq 1 \\
 x_1, x_2, x_3 &\geq 0.
 \end{aligned}
 \tag{f}$$

ESERCIZIO 1.4. Risolvere i seguenti programmi lineari utilizzando il metodo del simplesso.

$$\min 6x_1 + x_2 + 3x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
 10x_1 - 2x_2 + 5x_3 &\geq 15 \\
 x_1 - x_2 + 3x_3 &\geq 6 \\
 x_1, x_2, x_3 &\geq 0.
 \end{aligned}
 \tag{a}$$

$$\min 7x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
 4x_1 + 3x_2 + 2x_4 &\geq 2 \\
 -5x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 &\leq 1 \\
 x_1, \dots, x_4 &\geq 0.
 \end{aligned}
 \tag{b}$$

$$\min 2x_1 + x_2 + 4x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\x_1, x_2, x_3 &\geq 0.\end{aligned}\tag{c}$$

$$\max x_1 + x_2 + x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned}-x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \\4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2 \\3x_2 - 2x_4 &\leq 6 \\x_1, \dots, x_4 &\geq 0.\end{aligned}\tag{d}$$

$$\max 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4$$

soggetto a

$$\begin{aligned}-x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &\geq 2 \\2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 &\leq -3 \\x_1, \dots, x_4 &\geq 0.\end{aligned}\tag{e}$$

$$\min x_1 + x_2 - 2x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \\x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\x_1, x_2, x_3 &\geq 0.\end{aligned}\tag{f}$$

ESERCIZIO 1.5. Per i programmi lineari dell'esercizio 1.3, dire se le basi finali risultano ottime cambiando l'obiettivo come segue.

$$\begin{array}{ll}(a) \max 7x_1 + x_2 & (d) \min 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 \\(b) \min 4x_1 + 5x_2 - x_3 & (e) \max 5x_1 + 3x_2 \\(c) \min x_1 + x_2 + x_3 & (f) \min x_1 + 2x_2 - x_3\end{array}$$

ESERCIZIO 1.6. Per ognuno dei programmi lineari dell'esercizio 1.3, identificare la matrice A_B^{-1} .

ESERCIZIO 1.7. Risolvere i seguenti programmi lineari utilizzando il metodo grafico. Confrontare i risultati con quelli forniti dal simplesso.

$$\max x_1 + x_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
 2x_1 - x_2 &\geq 4 \\
 x_1 + 4x_2 &\leq 10 \\
 x_2 &\geq 1 \\
 x_1, x_2 &\geq 0. \\
 \min 2x_1 + x_2
 \end{aligned}
 \tag{a}$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
 x_1 + 4x_2 &\geq 8 \\
 x_1 &\geq 2 \\
 -2x_1 + x_2 &\leq 4 \\
 x_1, x_2 &\geq 0. \\
 \max 2x_1 - x_2
 \end{aligned}
 \tag{b}$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
 x_1 + 4x_2 &\geq 8 \\
 x_1 &\geq 2 \\
 -2x_1 + x_2 &\leq 4 \\
 x_1, x_2 &\geq 0. \\
 \max \frac{2}{3}x_1 + \frac{8}{3}x_2
 \end{aligned}
 \tag{c}$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
 x_1 + 4x_2 &\leq 9 \\
 x_1 &\leq 8 \\
 x_2 &\leq 2 \\
 x_1, x_2 &\geq 0.
 \end{aligned}
 \tag{d}$$

Capitolo 2

Dualità

ESERCIZIO 2.1. Partendo dalla forma standard, determinare i duali dei programmi lineari dell'esercizio 1.3.

ESERCIZIO 2.2. Partendo dalla forma standard, determinare i duali dei programmi lineari dell'esercizio 1.4.

ESERCIZIO 2.3. Dato il seguente programma lineare in forma standard

$$\max cx$$

soggetto a

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0, \end{aligned} \tag{P}$$

ed il suo duale

$$\min ub$$

soggetto a

$$u^T A \geq c, \tag{D}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}_+^m$ rispondere, utilizzando i concetti di dualità, alle seguenti domande.

(a) Se (P) ammette soluzione ottima finita ($S_{\text{ot}} \neq \emptyset$), sostituendo il vettore b con un vettore perturbato $b + \theta$, $\theta \in \mathbb{R}^m$, è possibile ottenere un programma lineare con obiettivo illimitato?

(b) Se (P) ammette soluzione ottima finita, sostituendo il vettore c con un vettore perturbato $c + \theta$, $\theta \in \mathbb{R}^n$ e ≤ 0 , è possibile ottenere un programma lineare con obiettivo illimitato?

(c) Se gli elementi della matrice A sono tutti ≥ 0 , (P) può essere un programma lineare con obiettivo illimitato?

ESERCIZIO 2.4. Dati (P) e (D) come nell'esercizio 2.3, ed una soluzione ammissibile duale \bar{u} , sia $S = \{j: \bar{u}a^j = c_j, 1 \leq j \leq n\}$, dove a^1, \dots, a^n sono le

colonne di A . È possibile affermare che se per il seguente programma lineare (detto *primale ristretto*) esiste una soluzione ammissibile \bar{x} allora \bar{x} e \bar{u} sono soluzioni ottime per (P) e (D) rispettivamente?

$$\max \sum_{j \in S} c_j x_j$$

soggetto a

$$\begin{aligned} Ax &= b & (\text{PR}) \\ x_j &= 0, \forall j \notin S \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

ESERCIZIO 2.5. Risolvere i seguenti programmi lineari, senza impostare il problema di prima fase.

$$\min 3x_1 + x_2 + 3x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &\geq 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned} \quad (a)$$

$$\min 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &\geq 6 \\ 2x_1 + x_3 &\geq 4 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &\leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned} \quad (b)$$

ESERCIZIO 2.6. Partendo dalla riformulazione rispetto alla base ottima, introdurre nell'esercizio 2.5(a) il vincolo supplementare

$$x_1 + 2x_3 \geq 1$$

e riottimizzare il programma, senza ricominciare da capo (come si può fare?).

ESERCIZIO 2.7. Come l'esercizio precedente, ma introducendo in 2.5(b) il vincolo

$$x_1 + x_2 \leq 5.$$

ESERCIZIO 2.8. Per ognuno dei programmi lineari dell'esercizio 1.3, determinare il valore ottimo delle variabili duali se l'ottimo esiste (considerare i duali formulati rispetto alle forme standard), e quando non esiste dire cosa può accadere nel duale.

ESERCIZIO 2.9. Come l'esercizio precedente, con riferimento ai programmi lineari dell'esercizio 1.4.

ESERCIZIO 2.10. Senza passare per la forma standard, scrivere i duali dei programmi lineari dell'esercizio 1.4.

Capitolo 3

Analisi di sensitività

ESERCIZIO 3.1. Per ognuno dei seguenti programmi lineari, per i quali sono specificate la base ottima B_{ot} , la $A_{B_{\text{ot}}}^{-1}$ e la riformulazione associata, verificare se ammissibilità ed ottimalità sono conservate a fronte delle perturbazioni specificate per i singoli c_i , b_i .

$$\max -3x_1 - 4x_2 + 2x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_5 &= 5 \end{aligned} \tag{a}$$
$$x_1, \dots, x_5 \geq 0,$$

$$B_{\text{ot}} = \{x_2, x_5\}, \quad A_{B_{\text{ot}}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \max \quad z &= -8 - x_1 - 2x_4 \\ x_2 &= 2 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_5 &= 7 - \frac{5}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_1, \dots, x_5 &\geq 0, \end{aligned}$$

$$\Delta b_2 = -8, \quad \Delta c_3 = 1, \quad \Delta c_5 = -\frac{1}{5}$$

$$\max 4x_1 - x_2 + 2x_4$$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_5 &= 6 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 &= 7 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 8 \end{aligned} \tag{b}$$
$$x_1, \dots, x_5 \geq 0,$$

$$B_{\text{ot}} = \{x_1, x_3, x_4\}, \quad A_{B_{\text{ot}}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 34 && -17x_2 && -4x_5 \\ x_1 &= 4 && -2x_2 && \\ x_3 &= 6 && -x_2 && -x_5 \\ x_4 &= 9 && -4x_2 && -2x_5 \\ &&& x_1, \dots, x_5 &\geq 0, \end{aligned}$$

$$\Delta b_3 = -1, \Delta c_2 = 1, \Delta c_4 = -1.$$

$$\max -3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4$$

soggetto a

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_4 &= 7 \\ x_2 + 5x_3 - x_5 &= 8 \\ x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1, \dots, x_5 &\geq 0, \end{aligned} \tag{c}$$

$$B_{\text{ot}} = \{x_2, x_3, x_4\}, \quad A_{B_{\text{ot}}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 41 && -9x_1 && -\frac{3}{2}x_5 \\ x_2 &= \frac{11}{2} && && -\frac{1}{4}x_5 \\ x_3 &= \frac{1}{2} && && +\frac{1}{4}x_5 \\ x_4 &= 18 && -3x_1 && -\frac{1}{2}x_5 \\ &&& x, \dots, x_5 &\geq 0, \end{aligned}$$

$$\Delta b_2 = -3, \Delta c_1 = 9, \Delta c_2 = -8.$$

$$\max x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 2x_4$$

soggetto a

$$\begin{aligned} -5x_1 + 2x_3 + 3x_4 &= 7 \\ 2x_2 - 4x_3 + 2x_5 &= 8 \\ x_2 + x_4 &= 6 \\ x_1, \dots, x_5 &\geq 0, \end{aligned} \tag{d}$$

$$B_{\text{ot}} = \{x_1, x_4, x_5\}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \max \quad z &= \frac{71}{5} && -\frac{23}{5}x_2 && -\frac{23}{5}x_3 \\ x_1 &= \frac{11}{5} && -\frac{3}{5}x_2 && +\frac{2}{5}x_3 \\ x_4 &= 6 && -x_2 && \\ x_5 &= 4 && -x_2 && +2x_3 \\ &&& x_1, \dots, x_5 &\geq 0, \end{aligned}$$

$$\Delta b_2 = 1, \Delta c_2 = 5, \Delta c_1 = -2.$$

$$\max 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_5$$

soggetto a

$$\begin{aligned} -5x_1 - 2x_3 + x_4 &= 6 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_5 &= 9 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 6 \\ x_1, \dots, x_5 &\geq 0, \end{aligned} \tag{e}$$

$$B_{\text{ot}} = \{x_2, x_4, x_5\}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \max \quad z &= -18 & -12x_1 & -12x_3 \\ x_2 &= 9 & +10x_1 & +8x_3 \\ x_4 &= 6 & +5x_1 & +2x_3 \\ x_5 &= 0 & -5x_1 & -3x_3 \\ x_1, \dots, x_5 &\geq 0. \end{aligned}$$

$$\Delta b_1 = 1, \Delta c_1 = -1, \Delta c_4 = 3.$$

$$\max 3x_1 - 4x_2 - x_4$$

soggetto a

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_3 + x_4 &= 7 \\ -x_2 + x_3 + 2x_5 &= 10 \\ 3x_1 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 &= 6 \\ x_1, \dots, x_5 &\geq 0, \end{aligned} \tag{f}$$

$$B_{\text{ot}} = \{x_1, x_4, x_5\}, \quad \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \max \quad z &= \frac{15}{7} & -\frac{61}{14}x_2 & -\frac{13}{14}x_3 \\ x_1 &= \frac{15}{7} & -\frac{1}{14}x_2 & +\frac{3}{14}x_3 \\ x_4 &= \frac{19}{7} & +\frac{1}{7}x_2 & +\frac{3}{14}x_3 \\ x_5 &= 5 & +\frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 \\ x_1, \dots, x_5 &\geq 0. \end{aligned}$$

$$\Delta b_2 = 2, \Delta c_1 = 1, \Delta c_2 = 1.$$

ESERCIZIO 3.2. Per ognuno dei programmi lineari dell'esercizio 3.1 calcolare per ogni termine noto b_i il massimo ed il minimo valore della perturbazione $\Delta b_i \in \mathbb{R}$ che non compromette l'ammissibilità della base specificata. Per ogni coefficiente di costo c_i , calcolare il minimo e massimo valore della perturbazione $\Delta c_i \in \mathbb{R}$ che non compromette l'ottimalità della base specificata.

ESERCIZIO 3.3. Per ognuno dei programmi lineari dell'esercizio 3.1, verificare se le seguenti perturbazioni Δa_{ij} dei coefficienti a_{ij} (coefficiente di x_j nel vincolo i) specificati causano perdita di ottimalità.

- (a) $\Delta a_{14} = 2$;
- (b) $\Delta a_{25} = -1$;
- (c) $\Delta a_{25} = -1$;
- (d) $\Delta a_{23} = 5$;
- (e) $\Delta a_{31} = -5$;
- (f) $\Delta a_{32} = 1$.

Capitolo 4

Programmazione intera

ESERCIZIO 4.1. Risolvere i seguenti programmi lineari interi per mezzo dell'algoritmo di Gomory.

$$\max 2x_1 - x_2 - x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 4x_2 + x_3 &\leq 5 \\ x_1 - x_3 &\geq 2 \\ x_1, \dots, x_3 &\geq 0, \text{ intere.} \end{aligned} \tag{a}$$

$$\max -2x_1 + 3x_2 - x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_4 &= 8 \\ x_2 + 2x_3 + x_5 &= 9 \\ x_1 - x_2 + x_6 &= 7 \\ x_1, \dots, x_5 &\geq 0, \text{ intere.} \end{aligned} \tag{b}$$

$$\max 2x_1 + 3x_2 - x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 5 \\ 2x_2 + x_3 + x_5 &= 3 \\ x_1, \dots, x_5 &\geq 0, \text{ intere.} \end{aligned} \tag{c}$$

$$\max -x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned}x_2 - x_3 - 2x_4 &= 3 \\ 2x_1 + x_3 + 3x_4 + x_5 &= 7 \\ x_1, \dots, x_5 &\geq 0, \text{ intere.}\end{aligned}\tag{d}$$

$$\max 3x_1 - x_2 + x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned}2x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 &= 3 \\ x_1, \dots, x_4 &\geq 0, \text{ intere.}\end{aligned}\tag{e}$$

$$\max 2x_2 + x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned}3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_4 &= 1 \\ x_1, \dots, x_4 &\geq 0, \text{ intere.}\end{aligned}\tag{f}$$

ESERCIZIO 4.2. Risolvere i seguenti programmi lineari con il metodo del branch and bound.

$$\max -x_1 - x_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 &\geq 5 \\ x_1 &\leq 3 \\ x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0, \text{ intere.}\end{aligned}\tag{a}$$

$$\max -x_1 + 2x_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned}3x_1 - 2x_2 &\geq 6 \\ x_1 &\leq 5 \\ x_1 &\geq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0, \text{ intere.}\end{aligned}\tag{b}$$

$$\max 3x_1 + 4x_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} 2x_1 &\leq 5 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 7 \\ x_1, x_2 &\geq 0, \text{ intere.} \end{aligned} \tag{c}$$

$$\max -3x_1 - x_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 5 \\ x_1 + 3x_2 &\geq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0, \text{ intere.} \end{aligned} \tag{d}$$

ESERCIZIO 4.3. Risolvere i programmi a variabili intere dell'esercizio 4.1 con il metodo del branch and bound.

Capitolo 5

Introduzione ai grafi

ESERCIZIO 5.1. Per ognuno dei seguenti grafi orientati $G(V, A)$, rappresentati come lista di adiacenze, determinare se G è connesso o meno utilizzando l'algoritmo visto a lezione, e determinare le sue componenti connesse.

- (a) $a : (b, e), b : (c), c : \emptyset, d : (e, f), e : \emptyset, f : (c), g : (e, f).$
- (b) $a : (c), b : (d), c : (e), d : (f), e : (h), f : (g), g : (b), h : (a), i : (d).$
- (c) $a : (g), b : \emptyset, c : (b, d), d : (e), e : (b), f : (b), g : (a, h), h : (a).$
- (d) $a : (b), b : (c), c : (d, f), d : (a, e), e : (a, b), f : \emptyset.$
- (e) $a : (c, f), b : (a), c : (b), d : (e, g), e : (d, g), f : \emptyset, g : (d, e).$
- (f) $a : (c, d), b : (g), c : (f), d : \emptyset, e : (d), f : (h), g : (e, h), h : \emptyset.$

ESERCIZIO 5.2. Per ognuno dei grafi dell'esercizio 5.1, determinare se G è bipartito utilizzando l'algoritmo visto a lezione.

ESERCIZIO 5.3. Le seguenti matrici w_{ij} rappresentano i pesi degli archi di altrettanti grafi $G(V, A)$. Quando $w_{ij} = \infty$, l'arco corrispondente non esiste; se la matrice è triangolare alta, si intende riferita ad un grafo non orientato. Per ogni grafo, determinare uno spanning tree di peso totale minimo utilizzando entrambi gli algoritmi visti a lezione.

$\begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} \infty & 5 & 1 & 8 & 15 \\ 9 & \infty & 7 & \infty & \infty \\ 3 & 2 & \infty & 4 & \infty \\ \infty & 7 & \infty & \infty & 8 \\ 7 & 12 & 4 & \infty & \infty \end{pmatrix} \end{matrix}$ <p style="text-align: center;">(a)</p>	$\begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} \infty & 4 & 7 & \infty & 4 \\ \infty & \infty & 1 & 5 & 3 \\ 6 & \infty & \infty & 8 & 8 \\ 9 & \infty & \infty & \infty & 7 \\ \infty & \infty & 4 & 2 & \infty \end{pmatrix} \end{matrix}$ <p style="text-align: center;">(b)</p>
$\begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} \infty & 7 & 8 & 4 & 12 \\ & \infty & 12 & 1 & 2 \\ & & \infty & 5 & 3 \\ & & & \infty & 1 \\ & & & & \infty \end{pmatrix} \end{matrix}$ <p style="text-align: center;">(c)</p>	$\begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} \infty & 12 & 9 & 4 & 3 \\ & \infty & 3 & 2 & \infty \\ & & \infty & \infty & 6 \\ & & & \infty & 4 \\ & & & & \infty \end{pmatrix} \end{matrix}$ <p style="text-align: center;">(d)</p>

Capitolo 6

Problemi di flusso a costo minimo

Nel problema del flusso a costo minimo si considera un grafo $G(V, A)$, con costi c_{ij} associati ad ogni arco $(ij) \in A$. Ai nodi $i \in V$ sono associati valori b_i che identificano nodi sorgente ($b_i > 0$, il flusso viene generato a tali nodi), nodi destinazione ($b_i < 0$, il flusso viene “consumato”) e nodi di transito ($b_i = 0$). Il modello di Programmazione Lineare del problema è il seguente.

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

soggetto a

$$\begin{aligned} \sum_{j: (i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{j: (j,i) \in A} x_{ji} &= b_i \quad \forall i \in A, \\ x_{ij} &\geq 0, \quad \forall (i,j) \in A. \end{aligned} \tag{I}$$

I vincoli (I) esprimono la conservazione del flusso nella rete.

ESERCIZIO 6.1. Per ognuno dei grafi di Figura 6.1, dire se i seguenti insiemi di archi identificano basi del problema, ed in caso affermativo calcolare, quando possibile, i valori dei flussi nelle soluzioni ammissibili ad essi associate.

(a) $B_1 = \{(1, 2), (2, 3), (2, 6), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8)\}$,
 $B_2 = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (3, 6), (3, 5), (5, 8), (7, 8)\}$,
 $B_3 = \{(1, 2), (1, 4), (2, 6), (4, 5), (5, 6), (5, 8), (6, 7)\}$.

(b) $B_1 = \{(2, 1), (3, 6), (4, 1), (4, 5), (5, 7), (6, 2)\}$,
 $B_2 = \{(1, 3), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (6, 2), (6, 7)\}$,
 $B_3 = \{(1, 3), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (5, 7), (6, 2)\}$.

(c) $B_1 = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (4, 5), (5, 6)\}$,
 $B_2 = \{(1, 2), (2, 4), (3, 4), (4, 5), (5, 6)\}$,
 $B_3 = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (5, 6)\}$.

(d) $B_1 = \{(1, 2), (2, 6), (3, 4), (5, 4), (6, 3)\}$,
 $B_2 = \{(1, 2), (3, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 6)\}$,
 $B_3 = \{(1, 2), (1, 6), (3, 2), (3, 4), (5, 3)\}$.

- (e) $B_1 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 8), (6, 3), (8, 7)\}$,
 $B_2 = \{(1, 2), (2, 4), (3, 2), (5, 7), (6, 3), (6, 5), (8, 7)\}$,
 $B_3 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), (5, 7), (6, 3)\}$.
- (f) $B_1 = \{(1, 2), (2, 5), (3, 6), (4, 2), (4, 7), (5, 3)\}$,
 $B_2 = \{(1, 2), (3, 2), (3, 6), (4, 7), (5, 3), (5, 7)\}$,
 $B_3 = \{(1, 2), (3, 2), (3, 6), (4, 2), (5, 3), (5, 7)\}$.

ESERCIZIO 6.2. Per ognuno dei grafi di Figura 6.1 determinare un flusso a costo minimo applicando il simplesso su rete, partendo dalla base B_0 specificata.

- (a) $B_0 = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (4, 5), (5, 6), (5, 8), (6, 7)\}$;
 (b) $B_0 = \{(1, 3), (1, 6), (3, 5), (4, 1), (5, 7), (6, 2)\}$;
 (c) $B_0 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)\}$;
 (d) $B_0 = \{(1, 2), (2, 6), (3, 4), (4, 6), (5, 4)\}$;
 (e) $B_0 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 6), (2, 4), (3, 5), (4, 8), (8, 7)\}$;
 (f) $B_0 = \{(1, 2), (2, 5), (3, 6), (4, 2), (5, 3), (5, 7)\}$.

ESERCIZIO 6.3. Commentare il risultato dell'esercizio precedente, punto (e). La presenza di soluzioni illimitate implica la possibilità di assegnare ad alcune variabili valori arbitrariamente grandi, mentre la rete dispone di una quantità $b_1 = -(b_7 + b_8) = 10$ *limitata* di flusso da mettere in circolazione. La conservazione del flusso sembra quindi, intuitivamente, violata. Giustificare questo (apparente) paradosso.

ESERCIZIO 6.4. Si consideri la particolare variante del problema del flusso a costo minimo dove $b_i = 0, \forall i \in V$:

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

soggetto a

$$\sum_{j: (i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{j: (j,i) \in A} x_{ji} = 0 \quad \forall i \in A, \quad (\text{II})$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall (i, j) \in A.$$

Dire se e quando il modello (II) possiede soluzioni ammissibili *non nulle* (*suggerimento*: considerare un flusso $\Delta > 0$ instradato lungo un circuito, se il grafo ne possiede uno...).

ESERCIZIO 6.5. Discutere la forma della regione di ammissibilità del modello di flusso a costo minimo: quando è un politopo (o poliedro) convesso? E quando è un poliedro illimitato (troncone)?

ESERCIZIO 6.6. Applicare sui grafi di Figura 6.2 la procedura per determinare una soluzione ammissibile di base iniziale.

ESERCIZIO 6.7. Si consideri la procedura per la determinazione di una soluzione ammissibile di base iniziale nel problema del flusso a costo minimo. Dire quando la soluzione di base finale prodotta da questa procedura è degenerare.

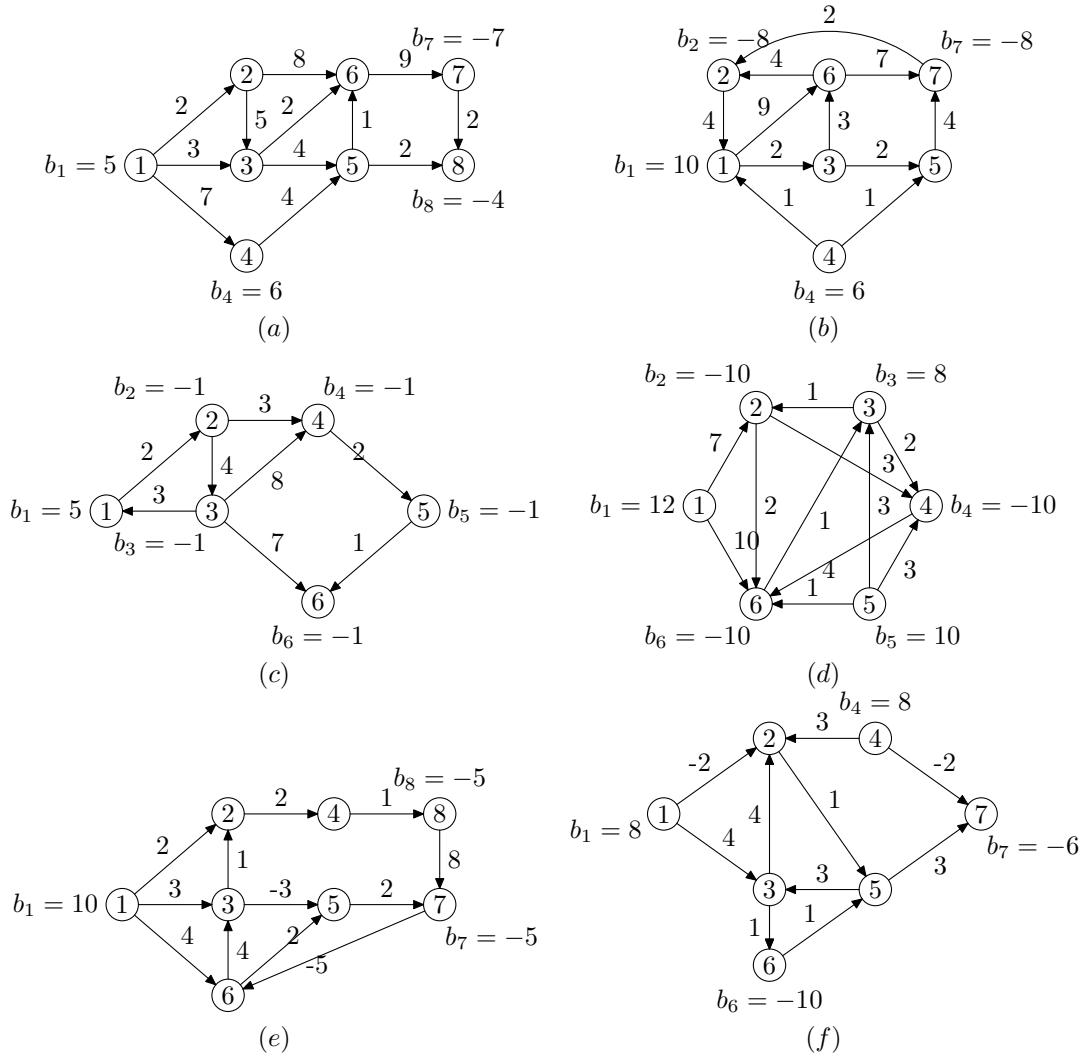
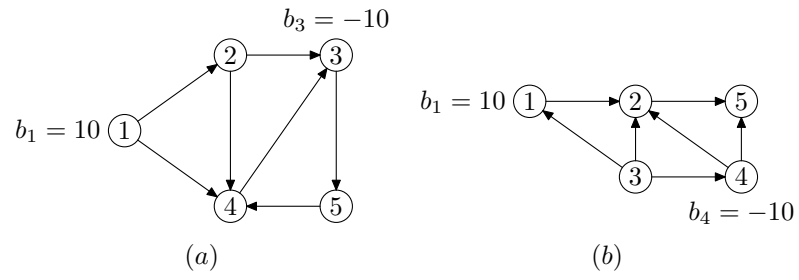


Figura 6.1: Reti di flusso. I costi unitari di trasporto c_{ij} sono indicati sugli archi, i termini noti b_i accanto ai nodi (si assume $b_i = 0$ quando non indicato).

Figura 6.2: Reti di flusso ($b_i = 0$ quando omesso).

Capitolo 7

Problema del massimo flusso

Nel problema del massimo flusso sono dati un grafo orientato $G(V, A)$ con capacità $c_{ij} > 0$ specificate per ogni arco $(i, j) \in A$, un nodo sorgente s ed un nodo destinazione d , e si richiede di determinare il massimo flusso che può transitare sulla rete tra s e d rispettando le capacità degli archi. Il modello in Programmazione Lineare del problema è

$$\max \sum_{i: (s,i) \in A} x_{si}$$

soggetto a

$$\begin{aligned} \sum_{j: (i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{j: (j,i) \in A} x_{ji} &= 0, & i \in V - \{s, d\}, \\ x_{ij} &\leq c_{ij}, & \forall (i, j) \in A \\ x_{ij} &\geq 0, & \forall (i, j) \in A. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 7.1. Per ognuno dei grafi di Figura 7.1, determinare il massimo flusso tra la sorgente s e la destinazione d , partendo dal flusso iniziale indicato. Determinare anche un taglio di capacità minima.

(a) $x_{s1} = 3, x_{12} = 2, x_{13} = 1, x_{24} = 1, x_{26} = 1, x_{6d} = 1, x_{43} = 1, x_{3d} = 2$ (tutte le altre $x_{ij} = 0$).

(b)–(e) Flusso nullo.

ESERCIZIO 7.2. Dire se e quando la regione di ammissibilità del problema del massimo flusso può essere un poliedro illimitato (troncone).

ESERCIZIO 7.3. Si supponga di avere un problema di massimo flusso con capacità associate ai nodi anziché agli archi; si suppone cioè che gli archi abbiano capacità infinita, ma in ogni nodo i possa transitare al massimo una quantità c_i di flusso. Proporre una procedura per risolvere tale problema.

ESERCIZIO 7.4. Scrivere il duale del problema del massimo flusso. È possibile affermare che in ogni soluzione di base di tale duale le variabili assumeranno solo valori interi? Motivare la risposta.

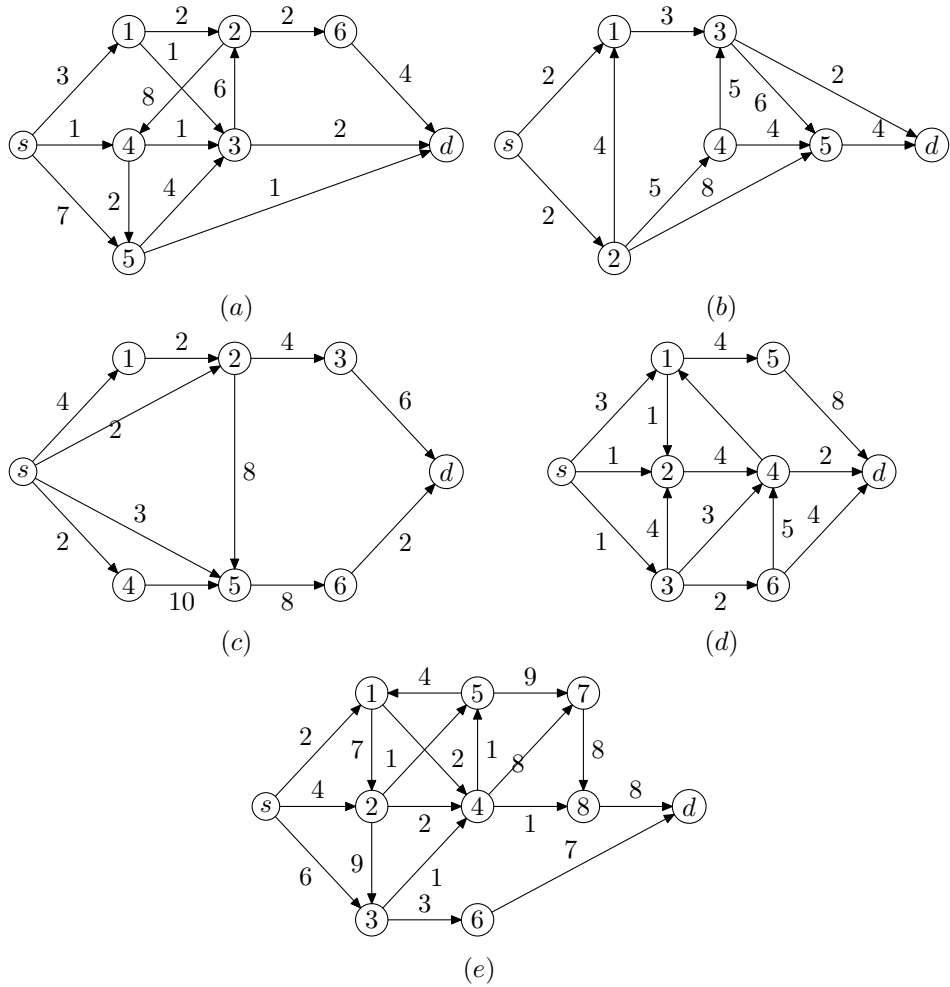


Figura 7.1: Reti di flusso con archi capacitati.

ESERCIZIO 7.5. Si consideri il duale del problema del massimo flusso formato nell'esercizio precedente, con variabili u_i ($i \in V - \{s, d\}$) e w_{ij} ($(i, j) \in A$). Verificare che, ad ogni taglio indotto da un insieme $U \subseteq V$ (con $s \in U$), é possibile associare una soluzione ammissibile duale, definita da

$$u_i = \begin{cases} -1, & \text{se } i \in U, \\ 0, & \text{se } i \notin U, \end{cases} \quad w_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i \in U, j \notin U, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Parte II
Soluzioni

Capitolo 1

Programmazione lineare

1.1. (a) Per giungere alla forma canonica occorre:

- invertire il segno della funzione obiettivo e passare ad un programma di massimo;
- moltiplicare per -1 il primo vincolo;
- sostituire il terzo vincolo con la coppia

$$2x_1 + 4x_3 \leq 12, \quad -2x_1 - 4x_3 \leq -12;$$

- trasformare la x_3 libera mediante

$$x_3 = u - v, \quad u, v \geq 0.$$

Quindi si ottiene

$$- \max -3x_1 - 4x_2 + 2u - 2v$$

soggetto a

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 + u - v &\leq -5 \\ 2x_1 + 4u - 4v &\leq 12 \\ -2x_1 - 4u + 4v &\leq -12 \\ x_1 + x_2 + u - v &\leq 15 \\ x_1, x_2, u, v &\geq 0. \end{aligned}$$

(b) Sostituendo x_3 con $-y_3$ e x_2 libera con $u - v$, $u, v \geq 0$, e rimpiazzando il vincolo di uguaglianza con la coppia di disuguaglianze che esso induce si ottiene

$$\max 4x_1 - u + v$$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 + u - v + y_3 &\leq 8 \\ -x_1 - u + v - y_3 &\leq -8 \\ 3x_1 - y_3 &\leq 7 \\ x_1, y_3, u, v &\geq 0. \end{aligned}$$

(c) Forma canonica:

$$- \max -8x_1 + x_2 + y_3$$

soggetto a

$$-x_1 + y_3 \leq -4$$

$$x_2 + y_3 \leq 7$$

$$x_1 - x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

(d) Forma canonica:

$$\max 4x_1 + y_2$$

soggetto a

$$x_1 - 2y_2 \leq 2$$

$$2x_1 - 7y_2 \leq 8$$

$$-2x_1 + 7y_2 \leq -8$$

$$x_1, y_2 \geq 0.$$

(e) Forma canonica:

$$- \max -4x_1 - 5x_2 + x_3 - 2u + 2v$$

soggetto a

$$-x_1 - x_2 \leq -4$$

$$x_2 + x_3 \leq 7$$

$$x_3 - u + v \leq 2$$

$$x_1 - u + v \leq 12$$

$$-x_1 + u - v \leq -12$$

$$x_1, x_2, x_3, u, v \geq 0.$$

(f) Forma canonica:

$$\max 2x_1 - 4y_3$$

soggetto a

$$x_1 + u - v - y_3 \leq 12$$

$$-x_1 + u - v \leq -2$$

$$u - v - y_3 \leq 4$$

$$x_1, u, v, y_3 \geq 0.$$

1.2. (a) In base alla definizione di forma canonica, è necessario effettuare le seguenti trasformazioni:

- invertire il segno della funzione obiettivo e passare ad un programma di massimo;
- sostituire la variabile libera $x_3 = u - v$, dove $u, v \geq 0$;
- introdurre una variabile di surplus nel primo vincolo per scriverlo in forma di uguaglianza;
- introdurre una variabile di slack nel terzo vincolo per scriverlo in forma di uguaglianza.

Si ottiene quindi

$$- \max -3x_1 - 4x_2 + 2u - 2v$$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - u + v - x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 4u - 4v &= 12 \\ x_1 + x_2 + u - v + x_5 &= 15 \\ x_1, x_2, u, v, x_4, x_5 &\geq 0. \end{aligned}$$

(b) Forma standard, con x_4 variabile di slack:

$$\max 4x_1 - u + v$$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 + u - v + y_3 &= 8 \\ 3x_1 - y_3 + x_4 &= 7 \\ x_1, u, v, y_3, x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

(c) Forma standard:

$$- \max -8x_1 + x_2 + y_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 - y_3 - x_4 &= 4 \\ x_2 + y_3 + x_5 &= 7 \\ x_1 - x_2 + x_6 &= 2 \\ x_1, \dots, x_6, y_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

(d) Forma standard:

$$\max 4x_1 + y_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 - 2y_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 - 7y_2 &= 8 \\ x_1, y_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

(e) Forma standard:

$$- \max -4x_1 - 5x_2 + x_3 - 2u + 2v$$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_5 &= 4 \\ x_2 + x_3 + x_6 &= 7 \\ x_3 - u + v + x_7 &= 2 \\ x_1 - u + v &= 12 \\ x_1, \dots, x_7, u, v &\geq 0. \end{aligned}$$

(f) Forma standard:

$$\max 2x_1 - 4y_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 + u - v - y_3 + x_4 &= 12 \\ x_1 - u + v - x_5 &= 2 \\ x_2 - y_3 + x_6 &= 4 \\ x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, y_3, u, v &\geq 0. \end{aligned}$$

1.3. (a) Come prima cosa occorre *sempre* porre il problema in forma standard, quindi:

$$\max 3x_1 + 2x_2 - 5x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &= 1 \\ x_1, \dots, x_5 &\geq 0, \end{aligned}$$

dove sono state aggiunte le due variabili di *slack* $x_4, x_5 \geq 0$. La presenza di queste due variabili permette di ottenere una riformulazione immediata rispetto alla base $B_0 = \{x_4, x_5\}$.

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 0 & +3x_1 & +2x_2 & -5x_3 \\ x_4 &= 4 & -4x_1 & +2x_2 & -2x_3 \\ x_5 &= 1 & -2x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_1, \dots, x_5 &\geq 0 \quad , \end{aligned}$$

corrispondente alla soluzione ammissibile di base $x_4 = 4, x_5 = 1, x_1, x_2, x_3 = 0$. L'esame dei costi ridotti indica che questa soluzione non è ottima, in quanto $\gamma_1, \gamma_2 > 0$. Si sceglie quindi x_1 come variabile entrante (criterio del massimo costo ridotto) nella prossima base. La variabile uscente viene scelta in base al criterio

$$\min \left\{ -\frac{\beta_i}{\alpha_{i1}} \right\}_{\alpha_{i1} < 0} = \min \left\{ \frac{4}{4}, \frac{1}{2} \right\} = -\frac{\beta_2}{\alpha_{21}},$$

quindi la variabile uscente è x_5 (cardine=-2). La riformulazione rispetto alla nuova base $B_1 = B_0 \cup \{x_1\} - \{x_5\} = \{x_4, x_1\}$ si ottiene applicando l'operazione di cardine sull'elemento individuato.

$$\begin{aligned} \max \quad z &= \frac{3}{2} & -\frac{3}{2}x_5 & +\frac{1}{2}x_2 & -\frac{13}{2}x_3 \\ x_4 &= 2 & +2x_5 & +4x_2 & \\ x_1 &= \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}x_5 & -\frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 \\ x_1, \dots, x_5 &\geq 0, \end{aligned}$$

poichè $\gamma_2 > 0$, si effettua l'operazione di cardine sull'elemento $\frac{1}{2}$ evidenziato — scelto con gli stessi, noti criteri — e si passa alla base $B_2 = B_1 \cup \{x_2\} - \{x_1\}$.

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 2 & -2x_5 & -x_1 & -7x_3 \\ x_4 &= 6 & -2x_5 & -8x_1 & -4x_3 \\ x_2 &= 1 & -x_5 & -2x_1 & -x_3 \end{aligned}$$

Poiché $\gamma_5, \gamma_1, \gamma_3 \leq 0$, la soluzione ammissibile di base $x_2 = 1, x_4 = 6, x_1, x_3, x_5 = 0$ risulta ottima, con valore di funzione obiettivo $z = 2$; essendo tutti i costi ridotti strettamente negativi, questa è anche l'unica soluzione ottima.

(b) Riscrivendo il programma in forma standard si ottiene

$$\max \quad x_1 - 2x_2 + 3x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_5 &= 6 \\ x_1, \dots, x_5 &\geq 0, \end{aligned}$$

con x_4, x_5 variabili di slack. La base iniziale — disponibile immediatamente — è $B_0 = \{x_4, x_5\}$, corrispondente alla seguente riformulazione.

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 0 & +x_1 & -2x_2 & +3x_3 \\ x_4 &= 2 & -x_1 & +2x_2 & -1x_3 \\ x_5 &= 6 & -3x_1 & +x_2 & +2x_3 \\ x_1, \dots, x_5 &\geq 0. \end{aligned}$$

Avendo $\gamma_1, \gamma_3 > 0$, si identifica l'elemento cardine evidenziato, che corrisponde al cambio di base $B_1 = B_0 \cup \{x_3\} - \{x_4\}$, cioè alla riformulazione

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 6 & -2x_1 & +4x_2 & -3x_4 \\ x_3 &= 2 & -x_1 & +2x_2 & -x_4 \\ x_5 &= 10 & -5x_1 & +5x_2 & -2x_4 \\ x_1, \dots, x_5 &\geq 0. \end{aligned}$$

A questo punto, avendo $\gamma_2 > 0$ ma nessun coefficiente negativo nella colonna corrispondente, si conclude che il problema è *illimitato* (e quindi $S_{ot} = \emptyset$) e non si procede oltre. Si può infatti osservare che lungo la semiretta

$$\begin{aligned} x_3 &= 2 + 2x_2 \\ x_5 &= 10 + 5x_2 & t \in [0, +\infty) \\ x_2 &= t \end{aligned}$$

si trovano soluzioni con $z \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow +\infty$.

(c) Base ottima $B_{\text{ot}} = \{x_1, x_3\}$ con $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_3 = \frac{4}{3}$, $z = \frac{16}{3}$.

(d) Ricavata la forma standard

$$-\max -3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4$$

soggetto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 &= 8 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_6 &= 4 \\ x_1 + x_3 + x_7 &= 10 \\ x_1, \dots, x_7 &\geq 0, \end{aligned}$$

con x_5, x_6, x_7 variabili di slack, l'applicazione del simplesso porta a determinare la base ottima $B_{\text{ot}} = \{x_4, x_6, x_3\}$, $x_3 = 10$, $x_4 = 6$, $x_6 = 12$.

(e) Il programma in forma standard risulta

$$\max x_1 + 3x_2 - x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_6 &= 8 \\ x_1, \dots, x_6 &\geq 0, \end{aligned}$$

con x_4, x_5, x_6 variabili di slack. L'applicazione del simplesso porta a determinare la base ottima $B_{\text{ot}} = \{x_2, x_5, x_6\}$ con $x_2 = 3$, $x_5 = 3$, $x_6 = 5$.

(f) Dalla forma standard

$$\max 4x_1 + x_2 + 5x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_4 &= 1 \\ 2x_2 - x_3 + x_5 &= 2 \\ x_1 + x_3 + x_6 &= 1 \\ x_1, \dots, x_6 &\geq 0, \end{aligned}$$

(x_4, x_5, x_6 variabili di slack) si perviene tramite l'applicazione del simplesso alla base ottima $B_{\text{ot}} = \{x_2, x_5, x_3\}$, con $x_2 = x_3 = x_5 = 1$.

1.4. (a) Il programma in forma standard è

$$-\max -6x_1 - x_2 - 3x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} 10x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 &= 15 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_5 &= 6 \\ x_1, \dots, x_5 &\geq 0. \end{aligned}$$

Le colonne di x_4, x_5 risultano linearmente indipendenti, (e quindi $\{x_4, x_5\}$ è una base) ma si verifica facilmente che *non corrispondono* ad una soluzione *ammissibile* di base. Occorre quindi procedere alla soluzione del *problema di prima fase*, formulato come segue.

$$\max -s_1 - s_2$$

soggetto a

$$10x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 + s_1 = 15$$

$$x_1 - x_2 + 3x_3 - x_5 + s_2 = 6$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0.$$

Le variabili s_1, s_2 sono anche dette *artificiali* in quanto non appartengono al programma originale. La riformulazione associata alla base iniziale $B_0 = \{s_1, s_2\}$ è

$$\begin{array}{rcll} \max & z = & -21 & +11x_1 & -3x_2 & +8x_3 & -x_4 & -x_5 \\ & s_1 = & 15 & -10x_1 & +2x_2 & -5x_3 & +x_4 & \\ & s_2 = & 6 & -x_1 & +x_2 & -3x_3 & & +x_5 \\ & & & x_1, \dots, x_5, s_1, s_2 & \geq 0. & & & \end{array}$$

Nota: nella riformulazione sono state eliminate, come dovuto, le variabili in base s_1, s_2 dall'espressione della funzione obiettivo $z = -s_1 - s_2$, per sostituzione dalle relazioni vincolari.

Procedendo ora normalmente, risulta $B_1 = B_0 \cup \{x_1\} - \{s_1\}$, e quindi

$$\begin{array}{rcll} \max & z = & -\frac{9}{2} & -\frac{11}{10}s_1 & -\frac{4}{5}x_2 & +\frac{5}{2}x_3 & +\frac{1}{10}x_4 & -x_5 \\ & x_1 = & \frac{3}{2} & -\frac{1}{10}s_1 & +\frac{1}{5}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & +\frac{1}{10}x_4 & \\ & s_2 = & \frac{9}{2} & +\frac{1}{10}s_1 & +\frac{4}{5}x_2 & -\frac{5}{2}x_3 & -\frac{1}{10}x_4 & +x_5 \\ & & & x_1, \dots, x_5, s_1, s_2 & \geq 0. & & & \end{array}$$

con il cardine selezionato si effettua quindi il cambio di base $B_2 = B_1 \cup \{x_3\} - \{s_2\}$.

$$\begin{array}{rcll} \max & z = & 0 & -s_1 & & -s_2 & & \\ & x_1 = & \frac{3}{5} & -\frac{3}{25}s_1 & +\frac{1}{25}x_2 & +\frac{1}{5}s_2 & +\frac{3}{25}x_4 & -\frac{1}{5}x_5 \\ & x_3 = & \frac{9}{5} & +\frac{1}{25}s_1 & +\frac{8}{25}x_2 & -\frac{2}{5}s_2 & -\frac{1}{25}x_4 & +\frac{2}{5}x_5 \\ & & & x_1, \dots, x_5, s_1, s_2 & \geq 0. & & & \end{array}$$

Poiché la prima fase è terminata con $z = 0$, si conclude che il programma lineare iniziale ammette soluzioni ammissibili. La base $B_2 = \{x_1, x_5\}$ ottenuta non contiene variabili artificiali e può essere utilizzata come punto di partenza per l'applicazione del semplice al programma iniziale. Si possono quindi eliminare s_1, s_2 e le colonne associate e scrivere la riformulazione

$$\begin{array}{rcll} -\max & z = & -9 & -\frac{11}{5}x_2 & -\frac{3}{5}x_4 & & & \\ & x_1 = & \frac{3}{5} & +\frac{1}{25}x_2 & +\frac{3}{25}x_4 & -\frac{1}{5}x_5 & & \\ & x_3 = & \frac{9}{5} & +\frac{8}{25}x_2 & -\frac{1}{25}x_4 & +\frac{2}{5}x_5 & & \\ & & & x_1, \dots, x_5, s_1, s_2 & \geq 0. & & & \end{array}$$

Come sopra, nella funzione obiettivo si è provveduto ad eliminare le variabili in base, sostituendo in essa le relazioni vincolari. Non si procede oltre in quanto $\gamma_2, \gamma_4, \gamma_5 \leq 0$, e quindi la base corrente è già ottima.

Nota: la funzione obiettivo originale e quella artificiale sono *completamente scorrelate*, quindi la prima fase non dà in generale alcuna garanzia di ottimalità sulla soluzione ammissibile trovata, che potrebbe essere anche molto lontana dall'ottimo.

(b) Il problema in forma standard risulta

$$- \max -7x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4$$

soggetto a

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 2x_4 - x_5 &= 2 \\ -5x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + x_6 &= 1 \\ x_1, \dots, x_6 &\geq 0, \end{aligned}$$

con x_5 variabile di surplus e x_6 variabile di slack. Non avendo una base ammissibile immediatamente disponibile, occorre risolvere il problema di prima fase

$$\max -s_1$$

soggetto a

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 2x_4 - x_5 + s_1 &= 2 \\ -5x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + x_6 &= 1 \\ x_1, \dots, x_6, s_1 &\geq 0. \end{aligned}$$

In questo caso solo una variabile artificiale s_1 è strettamente necessaria, in quanto si vede che $B_0 = \{s_1, x_6\}$ forma già una base ammissibile. Procedendo si ottiene

$$\begin{aligned} \max \quad z &= -2 + 4x_1 + 3x_2 + 2x_4 - x_5 \\ s_1 &= 2 - 4x_1 - 3x_2 - 2x_4 + x_5 \\ x_6 &= 1 + 5x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1, \dots, x_6, s_1 &\geq 0. \end{aligned}$$

Facendo cardine sul coefficiente -4 si ottiene $B_1 = B_0 \cup \{x_1\} - \{s_1\}$, e quindi

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 0 - s_1 \\ x_1 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}s_1 - \frac{3}{4}x_2 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{4}x_5 \\ x_6 &= \frac{7}{2} - \frac{5}{4}s_1 - \frac{3}{4}x_2 - x_3 - \frac{3}{2}x_4 + \frac{5}{4}x_5 \\ x_1, \dots, x_6, s_1 &\geq 0. \end{aligned}$$

Poiché $z = 0$ nella prima fase, si può passare alla riformulazione rispetto a B_1 del programma iniziale ed applicare il simplesso.

$$\begin{aligned} - \max \quad z &= -\frac{7}{2} + \frac{13}{4}x_2 + 5x_3 + \frac{9}{2}x_4 - \frac{7}{4}x_5 \\ x_1 &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x_2 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{4}x_5 \\ x_6 &= \frac{7}{2} - \frac{3}{4}x_2 - \mathbf{1}x_3 - \frac{3}{2}x_4 + \frac{5}{4}x_5 \\ x_1, \dots, x_6 &\geq 0. \end{aligned}$$

Facendo cardine sul -1 si cambia $B_2 = B_1 \cup \{x_6\} - \{x_3\}$, ottenendo

$$\begin{aligned} - \max \quad z &= 14 - \frac{1}{2}x_2 - 5x_6 - 3x_4 + \frac{9}{2}x_5 \\ x_1 &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x_2 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{4}x_5 \\ x_3 &= \frac{7}{2} - \frac{3}{4}x_2 - x_6 - \frac{3}{2}x_4 + \frac{5}{4}x_5 \\ x_1, \dots, x_6 &\geq 0. \end{aligned}$$

A questo punto sulla colonna di x_5 si riconosce la condizione di illimitatezza e non si procede oltre. Lungo la semiretta

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x_5 \\ x_3 &= \frac{7}{2} + \frac{5}{4}x_5 \quad t \in [0, +\infty] \\ x_5 &= t \end{aligned}$$

si trovano soluzioni con $z \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow +\infty$.

(c) La forma standard è

$$- \max -2x_1 - x_2 - 4x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Il problema di prima fase risulta

$$\max -s_1 - s_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + s_2 &= 5 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Risolvendo il problema di prima fase si trova la base ammissibile $B = \{x_3, x_1\}$, e da qui la base ottima $B_{ot} = \{x_2, x_1\}$ ($x_2 = 1, x_1 = 2$).

(d) Il programma in forma standard è (aggiungendo una variabile di slack $x_5 \geq 0$)

$$\max x_1 + x_2 + x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \\ 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 3x_2 - 2x_4 + x_5 &= 6 \\ x_1, \dots, x_5 &\geq 0, \end{aligned}$$

ed il relativo problema di prima fase risulta come segue.

$$\max -s_1 - s_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + s_1 &= 5 \\ 4x_2 + x_3 + 2x_4 + s_2 &= 2 \\ 3x_2 - 2x_4 + x_5 &= 6 \\ x_1, \dots, x_5, s_1, s_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Partendo dalla base $B_0 = \{s_1, s_2, x_5\}$ ($s_1 = 5$, $s_2 = 2$, $x_5 = 6$) si ottiene quanto segue.

$$\begin{aligned} \max \quad z &= -7 & -x_1 & & -6x_2 & +2x_3 & +3x_4 \\ s_1 &= 5 & +x_1 & & +2x_2 & -x_3 & -x_4 \\ s_2 &= 2 & & & -4x_2 & -x_3 & -2x_4 \\ x_5 &= 6 & & & -3x_2 & & +2x_4 \\ x_1, \dots, x_5, s_1, s_2 &\geq 0; \end{aligned}$$

$$B_1 = B_0 \cup \{x_4\} - \{s_2\},$$

$$\begin{aligned} \max \quad z &= -4 & -x_1 & & +\frac{1}{2}x_3 & -\frac{3}{2}s_2 \\ s_1 &= 4 & +x_1 & +4x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & +\frac{1}{2}s_2 \\ x_4 &= 1 & & -2x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & -\frac{1}{2}s_2 \\ x_5 &= 8 & & -7x_2 & -x_3 & -s_2 \\ x_1, \dots, x_5, s_1, s_2 &\geq 0; \end{aligned}$$

$$B_2 = B_1 \cup \{x_3\} - \{x_4\},$$

$$\begin{aligned} \max \quad z &= -3 & -x_1 & -2x_2 & -x_4 & -2s_2 \\ s_1 &= 3 & +x_1 & +6x_2 & +x_4 & +s_2 \\ x_3 &= 2 & & -4x_2 & -2x_4 & -s_2 \\ x_5 &= 6 & & -3x_2 & +2x_4 & \\ x_1, \dots, x_5, s_1, s_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Il problema di prima fase è stato risolto all'ottimo, con valore di funzione obiettivo non nullo, quindi per il programma lineare iniziale *non esiste soluzione ammissibile*.

(e) La forma standard del programma è

$$\max 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4$$

soggetto a

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &= 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 - x_6 &= 3 \\ x_1, \dots, x_6 &\geq 0. \end{aligned}$$

Dal problema di prima fase si ottiene la base ammissibile $B = \{x_2, x_4\}$, e successivamente, applicando il simplesso alla riformulazione del programma iniziale rispetto a B , si verifica che questo è illimitato.

(f) Non esiste soluzione ammissibile.

1.5. (a) Dalla riformulazione rispetto alla base finale $\{x_4, x_2\}$ si hanno le relazioni

$$\begin{aligned} x_4 &= 6 - 2x_5 + 8x_1 - 4x_3, \\ x_2 &= 1 - x_5 - 2x_1 - x_3. \end{aligned}$$

Utilizzando queste relazioni per eliminare le variabili in base dall'obiettivo $z = 7x_1 + x_2 + 4x_3$ si riformula quest'ultimo come

$$\max z = 1 - x_5 + 5x_1 - x_3,$$

dove il costo ridotto $\gamma_1 > 0$ indica che la base $\{x_2, x_4\}$ non è ottima.

(b) Tenendo presente che $\min 4x_1 + 5x_2 - x_3$ equivale a $\max -4x_1 - 5x_2 + x_3$ nella forma standard, riformulando rispetto alla base finale $\{x_3, x_5\}$ si ottiene

$$\begin{aligned} \max z &= 2 - 5x_1 - 3x_2 - x_4 \\ x_3 &= 2 - x_1 + 2x_2 - x_4 \\ x_5 &= 10 - 5x_1 + 5x_2 - 2x_4. \end{aligned}$$

I costi ridotti $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_4 \leq 0$ indicano che la base $\{x_3, x_5\}$ è ottima per il nuovo obiettivo.

(c) Non ottima.

(d) Ottima.

(e) Ottima.

(f) Non ottima.

1.6. (a) La A_B^{-1} si legge nella riformulazione finale, sotto le colonne che nella formulazione iniziale rappresentavano la matrice identità. Quindi, riscrivendo il sistema finale:

$$\begin{aligned} \max z &= 2 - x_1 - 7x_3 \\ 6 &= -8x_1 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 \\ 1 &= 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5. \end{aligned}$$

La matrice identità appariva, nella riformulazione iniziale, sotto le colonne di x_4, x_5 , quindi

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Analogamente, riscrivendo la riformulazione finale si ha

$$\begin{aligned} \max z &= 6 - 2x_1 + 4x_2 - 3x_4 \\ 2 &= x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \\ 10 &= 5x_1 - 5x_2 + 2x_4 + x_5 \end{aligned}$$

e risulta, tenendo conto che sotto x_4, x_5 appariva la matrice identità,

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$

$$(d) A_B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(e) A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(f) A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

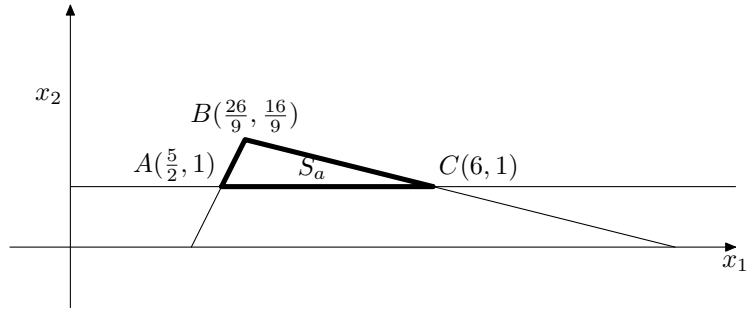
1.7. La Figura 3.1 illustra le regioni S_a per i programmi lineari in esame. Si possono fare le seguenti considerazioni.

(a) Il punto $(x_1 = 6, x_2 = 1)$ è il punto di S_a più lontano dalla retta $z = 0$, quindi è l'unica soluzione ottima.

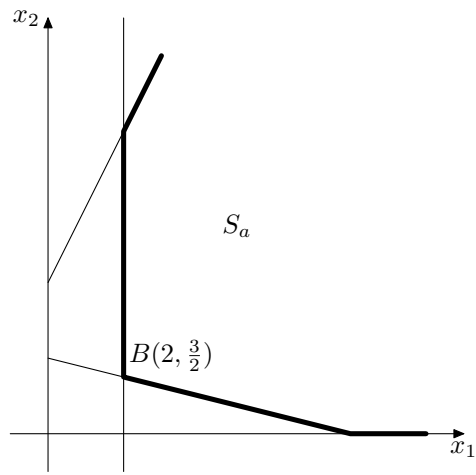
(b) Il punto $(x_1 = 2, x_2 = \frac{3}{2})$ è il punto di S_a più vicino alla retta $z = 0$.

(c) Lungo la semiretta $x_1 \geq 8, x_2 = 0$ che appartiene ad S_a si può osservare che si trovano punti con valore di funzione obiettivo grande a piacere, quindi il problema è illimitato.

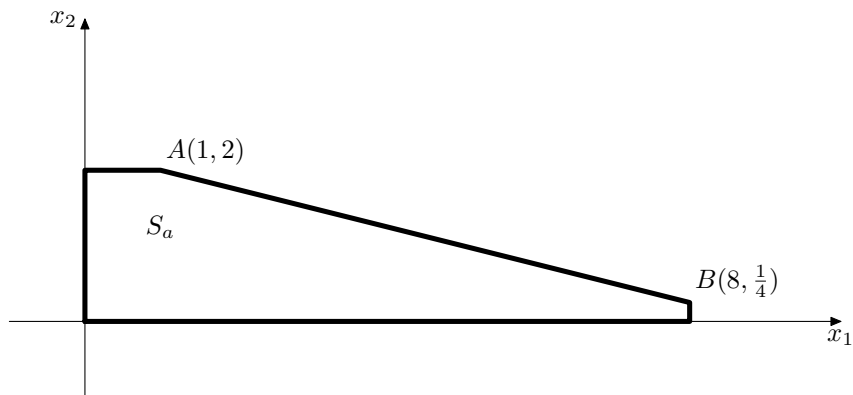
(d) Il punto $(x_1 = 1, x_2 = 2)$ è a distanza massima dalla retta $z = 0$, e con esso tutti i punti del segmento che lo congiunge a $(x_1 = 8, x_2 = \frac{1}{4})$.



(a)



(b) - (c)



(d)

Figura 1.1: Regioni di ammissibilità per l'esercizio 1.7.

Capitolo 2

Dualità

2.1. Riferendosi alle forme standard ottenute per l'esercizio 1.3 si ottengono i seguenti programmi duali.

$$\min 4u_1 + u_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} 4u_1 + 2u_2 &\geq 3 \\ -2u_1 + u_2 &\geq 2 \\ 2u_1 + u_2 &\geq -5 \\ u_1, u_2 &\geq 0. \end{aligned} \tag{a}$$

$$\min 2u_1 + 6u_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} u_1 + 3u_2 &\geq 1 \\ -2u_1 - 2u_2 &\geq -2 \\ u_1 - 2u_2 &\geq 3 \\ u_1, u_2 &\geq 0. \end{aligned} \tag{b}$$

Nota: sommando il secondo e terzo vincolo, si ottiene $-u_1 - 4u_2 \geq 1$, che è incompatibile con i vincoli $u_1, u_2 \geq 0$. Quindi il programma duale (b) non ha soluzione ammissibile. Questo è coerente con quanto ricavato per il primale nell'esercizio 1.3 (programma illimitato).

$$\min 2u_1 + 12u_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} u_1 + 2u_2 &\geq 2 \\ u_1 + 3u_2 &\geq 1 \\ u_1 + 8u_2 &\geq 3 \\ u_1, u_2 &\geq 0 \end{aligned} \tag{c}$$

$$\min 8u_1 + 4u_2 + 10u_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
 2u_1 - u_2 + u_3 &\geq -3 \\
 u_1 + 2u_2 &\geq -1 \\
 -u_1 - 2u_2 + u_3 &\geq 2 \\
 3u_1 + 2u_2 &\geq 1 \\
 u_1, u_2, u_3 &\geq 0.
 \end{aligned} \tag{d}$$

$$\min 3u_1 + 6u_2 + 8u_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
 2u_1 + u_2 + 2u_3 &\geq 1 \\
 u_1 + u_2 + u_3 &\geq 3 \\
 3u_2 + 3u_3 &\geq -1 \\
 u_1, u_2, u_3 &\geq 0.
 \end{aligned} \tag{e}$$

$$\min u_1 + 2u_2 + u_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
 -u_1 + u_3 &\geq 4 \\
 u_1 + 2u_2 &\geq 1 \\
 -u_2 + u_3 &\geq 5 \\
 u_1, u_2, u_3 &\geq 0.
 \end{aligned} \tag{f}$$

2.2. Partendo dalle forme standard ricavate per l'esercizio 1.4 si ottengono i seguenti programmi duali.

$$\min 15u_1 + 6u_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
 10u_1 + u_2 &\geq -6 \\
 -2u_1 - u_2 &\geq -1 \\
 5u_1 + 3u_2 &\geq -3 \\
 u_1, u_2 &\leq 0.
 \end{aligned} \tag{a}$$

$$\min 2u_1 + u_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
 4u_1 - 5u_2 &\geq -7 \\
 3u_1 - 3u_2 &\geq -2 \\
 u_2 &\geq 5 \\
 2u_1 - u_2 &\geq 1 \\
 u_1 \leq 0, u_2 &\geq 0.
 \end{aligned} \tag{b}$$

$$\min 3u_1 + 5u_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} u_1 + 2u_2 &\geq -2 \\ u_1 + u_2 &\geq -1 \\ 2u_1 + 3u_2 &\geq -4 \end{aligned} \quad (c)$$

$$\min 5u_1 + 2u_2 + 6u_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} -u_1 &\geq 1 \\ -2u_1 + 4u_2 + 3u_3 &\geq 1 \\ u_1 + u_2 &\geq 1 \\ u_1 + 2u_2 - 2u_3 &\geq 0 \\ u_3 &\geq 0 \end{aligned} \quad (d)$$

$$\min 2u_1 + 3u_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} -u_1 - 2u_2 &\geq 4 \\ 2u_1 + u_2 &\geq 3 \\ u_1 - u_2 &\geq -1 \\ -u_1 + 5u_2 &\geq 2 \\ u_1, u_2 &\leq 0. \end{aligned} \quad (e)$$

$$\min 2u_1 + 5u_2 + 4u_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} 2u_1 + 3u_2 + u_3 &\geq -1 \\ u_1 + u_2 + 2u_3 &\geq -1 \\ u_1 + 2u_2 + u_3 &\geq 2 \end{aligned} \quad (f)$$

2.3. (a) Formando il duale del programma perturbato

$$\max cx$$

soggetto a

$$\begin{aligned} Ax &= b + \theta \\ x &\geq 0, \end{aligned} \quad (P')$$

si ottiene

$$\min u(b + \theta)$$

soggetto a

$$u^T A \geq c. \quad (D')$$

Si noti che l'insieme delle soluzioni ammissibili duali $D_a = \{u: uA \geq c\}$ è lo stesso, sia per (D) che per (D'). Se (P') fosse illimitato, (D') non dovrebbe avere soluzioni ammissibili, e quindi $D_a = \emptyset$ anche per (D'). Ma è impossibile, in quanto (P) ha soluzione ottima finita, e quindi il suo duale (D) deve avere regione di ammissibilità non vuota (vedi Osservazione 14, sugli appunti). Quindi (P') non può essere illimitato.

(b) Il duale del problema perturbato questa volta è

$$\min ub$$

soggetto a

$$uA \geq c + \theta. \quad (D'')$$

Considerando una qualunque soluzione ammissibile u di (D), risulta

$$uA \geq c \geq c + \theta \quad (\theta \leq 0).$$

Quindi u è ammissibile anche per (D''), e questo impedisce che il primale perturbato sia illimitato.

(c) Si può osservare che ponendo

$$u_i = \frac{\max\{c_1, \dots, c_n\}}{\min\{a_{ij}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}}$$

si ottiene un u che soddisfa

$$uA \geq c,$$

e quindi una soluzione ammissibile duale. Quindi (P) non può essere illimitato.

2.4. Considerando il prodotto

$$(\bar{u}A - c)\bar{x} = \sum_{j=1}^n [(\bar{u}a^j - c_j)\bar{x}_j]$$

per ogni termine $(\bar{u}a^j - c_j)\bar{x}_j$ risulta che:

- se $\bar{u}a^j - c_j > 0$ allora $\bar{x}_j = 0$ per come è definito (PR);
- se $\bar{x}_j > 0$, allora deve essere $(\bar{u}a^j - c_j) = 0$, sempre per come è stato definito (PR).

Queste condizioni garantiscono che $(\bar{u}A - c)\bar{x} = 0$, quindi \bar{x} e \bar{u} rispettano le condizioni di complementarità, e sono soluzioni ottime per (P) e (D) rispettivamente.

2.5. (a) Come sempre, occorre riportare il programma alla sua forma standard, che risulta, con x_4, x_5 variabili di surplus:

$$\max -3x_1 - x_2 - 3x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_4 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_5 &= 8 \\ x_1, \dots, x_5 &\geq 0. \end{aligned}$$

È possibile considerare la riformulazione rispetto alla base $B_0 = \{x_4, x_5\}$, che sebbene non risulti ammissibile, risulta ammissibile per il duale.

$$\begin{aligned} \max \quad z = & 0 & -3x_1 & -x_2 & -3x_3 \\ x_4 = & -4 & +x_1 & +x_2 & \\ x_5 = & -8 & +2x_1 & +1x_2 & -x_3 \\ & & x_1, \dots, x_5 & \geq 0 \end{aligned}$$

In queste condizioni è possibile applicare il metodo del simplesso duale. In primo luogo si sceglie la variabile da portare *fuori* base: questa deve essere sempre una variabile che crea inammissibilità (cioè < 0). In questo caso, si può scegliere arbitrariamente x_5 . La scelta dell'elemento cardine (e quindi della variabile entrante) avviene in base al criterio

$$\min \left\{ -\frac{\gamma_i}{\alpha_{2i}} \right\}_{\alpha_{2i} > 0} = \min \left\{ \frac{3}{2}, 1 \right\} = -\frac{\gamma_2}{\alpha_{22}}.$$

Eseguendo quindi la solita operazione di cardine sull'elemento selezionato, si effettua il cambio di base $B_1 = B_0 - \{x_5\} \cup \{x_2\}$, ottenendo

$$\begin{aligned} \max \quad z = & -8 & -x_1 & -x_5 & -4x_3 \\ x_4 = & 4 & -x_1 & +x_5 & +x_3 \\ x_2 = & 8 & -2x_1 & +x_5 & +x_3 \\ & & x_1, \dots, x_5 & \geq 0 \end{aligned} .$$

La base così ottenuta risulta ottima, in quanto $\gamma_1, \gamma_5, \gamma_3 \leq 0$ e $x_2, x_4 \geq 0$ (base ammissibile ed ottima).

(b) La forma standard, che usa variabili di surplus x_4, x_5 ed una variabile di slack x_6 risulta

$$\max -2x_1 - 3x_2 - x_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 6 \\ 2x_1 + x_3 - x_5 &= 4 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_6 &= 2 \\ x_1, \dots, x_6 &\geq 0. \end{aligned}$$

Applicando il metodo del simplesso duale a partire dalla base ammissibile per il duale e non ammissibile per il primale $B_0 = \{x_4, x_5, x_6\}$ risulta quanto segue.

$$\begin{array}{rcll} \max & z = & 0 & -2x_1 & -3x_2 & -x_3 \\ & x_4 = & -6 & +1x_1 & +x_2 & -x_3 \\ & x_5 = & -4 & +2x_1 & & +x_3 \\ & x_6 = & 2 & -x_1 & -x_2 & +2x_3 \\ & & & & & x_1, \dots, x_6 \geq 0, \end{array}$$

$$B_1 = B_0 \cup \{x_1\} - \{x_4\}$$

$$\begin{array}{rcll} \max & z = & -12 & -2x_4 & -x_2 & -3x_3 \\ & x_1 = & 6 & +x_4 & -x_2 & +x_3 \\ & x_5 = & 8 & +2x_4 & -2x_2 & +3x_3 \\ & x_6 = & -4 & -x_4 & & +1x_3 \\ & & & & & x_1, \dots, x_6 \geq 0, \end{array}$$

$$B_2 = B_1 \cup \{x_3\} - \{x_6\}$$

$$\begin{array}{rcll} \max & z = & -24 & -5x_4 & -x_2 & -3x_6 \\ & x_1 = & 10 & +2x_4 & -x_2 & +x_6 \\ & x_5 = & 20 & +5x_4 & -2x_2 & +3x_6 \\ & x_3 = & 4 & +x_4 & & +x_6 \\ & & & & & x_1, \dots, x_6 \geq 0, \end{array}$$

con B_2 ottima ed ammissibile.

2.6. È possibile procedere nel seguente modo. Si considera la riformulazione del programma rispetto alla base ottima trovata in precedenza

$$\begin{array}{rcll} \max & z = & -8 & -x_1 & -x_5 & -4x_3 \\ & x_4 = & 4 & -x_1 & +x_5 & +x_3 \\ & x_2 = & 8 & -2x_1 & +x_5 & +x_3 \\ & & & & & x_1, \dots, x_5 \geq 0 \end{array} .$$

A questo punto si introduce il nuovo vincolo $x_1 + 2x_3 \geq 1$ direttamente nella formulazione, procedendo come segue: si scrive il vincolo in forma di uguaglianza, introducendo una nuova variabile di surplus s :

$$x_1 + 2x_3 - s = 1,$$

e si eliminano se necessario le variabili in base x_4, x_2 ; la variabile s viene portata nella base, che diventa $B = \{x_4, x_2, s\}$.

$$\begin{array}{rcll} \max & z = & -8 & -x_1 & -x_5 & -4x_3 \\ & x_4 = & 4 & -x_1 & +x_5 & +x_3 \\ & x_2 = & 8 & -2x_1 & +x_5 & +x_3 \\ & s = & -1 & +1x_1 & & +2x_3 \\ & & & & & x_1, \dots, x_5 \geq 0 \end{array} .$$

Si nota che il nuovo vincolo causa inammissibilità ($s < 0$ in base), ma non si perde ammissibilità duale. Quindi, anziché ricominciare da capo si può

procedere con il simplesso duale:

$$\begin{array}{rcll} \max & z = & -9 & -s & -x_5 & -2x_3 \\ & x_4 = & 3 & -s & +x_5 & +3x_3 \\ & x_2 = & 6 & -2s & +x_5 & +5x_3 \\ & x_1 = & 1 & +s & & -2x_3 \\ & & & & & x_1, \dots, x_5 \geq 0, \end{array}$$

trovando la base $\{x_4, x_2, x_1\}$ ammissibile ed ottima.

2.7. Si procede in modo analogo all'esercizio precedente: si considera la formulazione finale

$$\begin{array}{rcll} \max & z = & -24 & -5x_4 & -x_2 & -3x_6 \\ & x_1 = & 10 & +2x_4 & -x_2 & +x_6 \\ & x_5 = & 20 & +5x_4 & -2x_2 & +3x_6 \\ & x_3 = & 4 & +x_4 & & +x_6 \\ & & & & & x_1, \dots, x_6 \geq 0; \end{array}$$

il nuovo vincolo si scrive come

$$x_1 + x_2 + s = 5$$

ed eliminando la x_1 e portando in base s si ottiene

$$\begin{array}{rcll} \max & z = & -24 & -5x_4 & -x_2 & -3x_6 \\ & x_1 = & 10 & +2x_4 & -x_2 & +x_6 \\ & x_5 = & 20 & +5x_4 & -2x_2 & +3x_6 \\ & x_3 = & 4 & +x_4 & & +x_6 \\ & s = & -5 & -2x_4 & & -x_6 \\ & & & & & x_1, \dots, x_6 \geq 0. \end{array}$$

Infine, avendo $\beta_4 = -5 < 0$, costi ridotti ≤ 0 e nessun coefficiente positivo sulla riga di s si conclude che il duale è illimitato, cioè il primale non possiede più soluzione ammissibili.

2.8. (a) I vincoli del duale sono associati alle variabili del primale; le condizioni di complementarità primale-duale si scrivono come $(uA - c)x = 0$, quindi per $j = 1, \dots, n$

$$x_j > 0 \quad \text{implica} \quad ua^j = c_j,$$

dove $ua^j \geq c_j$ è il vincolo duale corrispondente. In questo caso il duale è

$$\min 4u_1 + u_2$$

soggetto a

$$\begin{array}{rcll} 4u_1 + 2u_2 & \geq & 3 & (x_1) \\ -2u_1 + u_2 & \geq & 2 & (x_2) \\ 2u_1 + u_2 & \geq & -5 & (x_3) \\ u_1 & \geq & 0 & (x_4) \\ u_2 & \geq & 0 & (x_5) \end{array}$$

e quindi data la base ottima $\{x_2, x_4\}$ si può impostare il sistema

$$\begin{array}{rcl} -2u_1 + u_2 & = & 2 \\ u_1 & = & 0 \end{array} \implies u_1 = 0, u_2 = 2.$$

(b) Il duale non è ammissibile, come già verificato.

$$(c) \quad \begin{array}{rcl} u_1 + 2u_2 & = & 2 \\ u_1 + 8u_2 & = & 3 \end{array} \implies u_1 = \frac{10}{6}, u_2 = \frac{1}{6}.$$

$$(d) \quad \begin{array}{rcl} -u_1 - 2u_2 + u_3 & = & 2 \\ 3u_1 + 2u_2 & = & 1 \\ u_2 & = & 0 \end{array} \implies u_1 = \frac{1}{3}, u_2 = 0, u_3 = \frac{7}{3}.$$

$$(e) \quad \begin{array}{rcl} u_1 + u_2 + u_3 & = & 3 \\ u_2 & = & 0 \\ u_3 & = & 0 \end{array} \implies u_1 = 3, u_2 = 0, u_3 = 0.$$

$$(f) \quad \begin{array}{rcl} u_1 + 2u_2 & = & 1 \\ -u_2 + u_3 & = & 5 \\ u_2 & = & 0 \end{array} \implies u_1 = 1, u_2 = 0, u_3 = 5.$$

$$2.9. \quad (a) \quad \begin{array}{rcl} 10u_1 + u_2 & = & -6 \\ 5u_1 + 3u_2 & = & -3 \end{array} \implies u_1 = \frac{3}{5}, u_2 = 0.$$

(b) Il duale non ha soluzioni ammissibili.

$$(c) \quad \begin{array}{rcl} u_1 + 2u_2 & = & -2 \\ u_1 + u_2 & = & -1 \end{array} \implies u_1 = 0, u_2 = -1.$$

(d) Poiché il primale non ha soluzioni ammissibili, il duale può essere illimitato o avere regione ammissibile vuota.

(e) Non esiste soluzione ammissibile perché il primale è illimitato.

(f) Il duale è illimitato o ha regione ammissibile vuota in quanto il primale non ha soluzioni ammissibili.

2.10.

$$\max 15u_1 + 6u_2$$

soggetto a

$$\begin{array}{rcl} 10u_1 + u_2 & \leq & 6 \\ -2u_1 - u_2 & \leq & 1 \\ 5u_1 + 3u_2 & \leq & 3 \\ u_1, u_2 & \geq & 0. \end{array} \tag{a}$$

$$\max 2u_1 + u_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
 4u_1 - 5u_2 &\leq 7 \\
 3u_1 - 3u_2 &\leq 2 \\
 u_2 &\leq -5 \\
 2u_1 - u_2 &\leq 1 \\
 u_1 \geq 0, u_2 \leq 0.
 \end{aligned}
 \tag{b}$$

$$\max 3u_1 + 5u_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
 u_1 + 2u_2 &\leq 2 \\
 u_1 + u_2 &\leq 1 \\
 2u_1 + 3u_2 &\leq 4
 \end{aligned}
 \tag{c}$$

$$\min 5u_1 + 3u_2 + 6u_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
 -u_1 &\geq 1 \\
 -2u_1 + 4u_2 + 3u_3 &\geq 1 \\
 u_1 + u_2 &\geq 1 \\
 u_1 + 2u_2 - 2u_3 &\geq 0 \\
 u_3 &\geq 0.
 \end{aligned}
 \tag{d}$$

$$\min 2u_1 - 3u_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
 -u_1 + 2u_2 &\geq 4 \\
 2u_1 - u_2 &\geq 3 \\
 u_1 + u_2 &\geq -1 \\
 -u_1 - 5u_2 &\geq 2 \\
 u_1 \leq 0, u_2 \geq 0.
 \end{aligned}
 \tag{e}$$

$$\max 2u_1 + 5u_2 + 4u_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
 2u_1 + 3u_2 + u_3 &\leq 1 \\
 u_1 + u_2 + 2u_3 &\leq 1 \\
 u_1 + 2u_2 + u_3 &\leq -2
 \end{aligned}
 \tag{f}$$

Capitolo 3

Analisi di sensitività

3.1. (a) Perturbando il termine noto b_2 della quantità $\Delta b_2 = -8$ si ottiene il nuovo vettore dei termini noti

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{da cui} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = A_B^{-1} \bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

non ammissibile (richiede $x_5 < 0$). Nota: $\bar{b}_2 = -3$ non implica la perdita di ammissibilità, in quanto il problema può facilmente essere riportato ad una forma standard cambiando segno al secondo vincolo; l'ammissibilità si valuta *sempre* su $A_B^{-1} \bar{b} \geq 0$.

Perturbando c_3 ($x_3 \notin B_{\text{ot}}$) con un $\Delta c_3 = 1$ i costi ridotti si ottengono sommando il contributo Δc_3 della variazione al costo ridotto fuori base; la funzione obiettivo riformulata rispetto a B_{ot} sotto questa perturbazione è

$$\max z = -8 - x_1 + x_3 - 2x_4,$$

quindi la perturbazione causa perdita di ottimalità.

Perturbando c_5 con $\Delta c_5 = -\frac{1}{5}$ ($x_5 \in B_{\text{ot}}$), sommando il contributo

$$\Delta c_5 x_5 = 7\Delta c_5 - \frac{5}{2}\Delta c_5 x_1 + \frac{1}{2}\Delta c_5 x_3 + \frac{1}{2}\Delta c_5 x_4 \quad (\Delta c_5 = \frac{1}{5})$$

la funzione obiettivo riformulata risulta

$$\max z = -\frac{47}{5} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{10}x_3 - \frac{21}{10}x_4,$$

senza perdita di ottimalità ($\gamma_1, \gamma_3, \gamma_4 \leq 0$); si può osservare che la perturbazione causa una variazione della funzione obiettivo pari a $\Delta z = \Delta c_5 x_5^* = -\frac{7}{5}$.

(b) La perturbazione di b_3 non causa perdita di ammissibilità; si può osservare che, poiché la soluzione ottima del duale non cambia, dal valore delle variabili duali

$$u^* = (u_1^* \quad u_2^* \quad u_3^*) = c_B A_B^{-1} = (4 \quad 0 \quad 2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (4 \quad -2 \quad 3)$$

si può dedurre che la perturbazione $\Delta b_3 = -1$ induce una variazione nel valore della funzione obiettivo

$$\Delta z = u_3^* \Delta b_3 = -3.$$

Le perturbazioni di c_2 e c_4 non causano perdita di ottimalità; le variazioni nel valore di funzione obiettivo sono rispettivamente $\Delta z = 0$ per c_2 e $\Delta z = c_4 x_4^* = -9$.

(c) La perturbazione di b_2 causa perdita di ammissibilità; la perturbazione di c_1 non causa perdita di ottimalità (e $\Delta z = 0$), mentre la perturbazione di c_2 causa perdita di ottimalità.

(d) La perturbazione di b_2 non causa perdita di ammissibilità (risulta inoltre $\Delta z = 0$ in quanto si verifica $u_2^* = 0$); la perturbazione di c_2 causa perdita di ottimalità, mentre la perturbazione di c_1 no (e risulta $\Delta z = -\frac{22}{5}$).

(e) La perturbazione di b_1 causa perdita di ammissibilità; la perturbazione di c_1 non causa perdita di ottimalità e non cambia il valore ottimo, mentre quella di c_4 causa perdita di ottimalità.

(f) La perturbazione di b_2 non causa perdita di ammissibilità (risulta inoltre $\Delta z = u_2^* \Delta b_2 = -\frac{5}{7}$); la perturbazione di c_1 non causa perdita di ottimalità (risulta $\Delta z = \Delta c_1 x_1^* = \frac{15}{7}$), mentre la perturbazione di c_2 non causa perdita di ottimalità ed il valore dell'ottimo non cambia.

3.2. (a) La perturbazione di un termine noto compromette l'ammissibilità della base $B = \{x_2, x_5\}$ se la condizione $A_B^{-1} \bar{b} \geq 0$ cessa di valere per il vettore perturbato $\bar{b} = b + \Delta b$. Quindi, se il termine noto b_1 viene perturbato di una quantità (incognita) Δb_1 , l'insieme di valori di Δb_1 che non compromettono l'ammissibilità della base è definito dalle disuguaglianze

$$A_B^{-1}(b + \Delta b) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad A_B^{-1} \Delta b \geq -A_B^{-1} b$$

e, nel caso di b_1 ,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 + \Delta b_1 \\ 5 \end{pmatrix} \geq 0,$$

cioè

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta b_1 \\ 0 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Considerando le componenti, si scrive il sistema lineare

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta b_1 &\geq -2 \\ \frac{1}{2} \Delta b_2 &\geq -7 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad -4 \leq \Delta b_1 \leq +\infty.$$

Analogamente, per il termine noto b_2 si impostano le condizioni

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta b_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \end{pmatrix},$$

cioè

$$\begin{aligned} 0 &\geq -2 \\ \Delta b_2 &\geq -7 \end{aligned} \implies -7 \leq \Delta b_2 \leq +\infty.$$

Per quanto riguarda i coefficienti di costo della funzione obiettivo, si procede in modo analogo, ricordando che la base B è ancora ottima rispetto ad un vettore di costi perturbato $\bar{c} = c + \Delta c$ se $\bar{c}_N - \bar{c}_B A_B^{-1} N \leq 0$ (costi ridotti non positivi). Nel caso di c_1 ($x_1 \notin B_{\text{ot}}$) la variazione Δc_1 si ripercuote direttamente sul costo ridotto γ_1 , trasformando la funzione obiettivo riformulata in

$$\max z = -8 + (\Delta c_1 - 1)x_1 - 2x_4,$$

e per l'ottimalità occorre avere

$$\Delta c_1 - 1 \leq 0 \implies -\infty \leq \Delta c_1 \leq 1.$$

Perturbando il coefficiente c_2 ($x_2 \in B_{\text{ot}}$) con un Δc_2 e sommando il contributo

$$\Delta c_2 x_2 = 2\Delta c_2 - \frac{1}{2}\Delta c_2 x_1 + \frac{1}{2}\Delta c_2 x_3 + \frac{1}{2}\Delta c_2 x_4$$

la funzione obiettivo riformulata diventa

$$\max (2\Delta c_2 - 8) - (1 + \frac{1}{2}\Delta c_2)x_1 + \frac{1}{2}\Delta c_2 x_3 + (\frac{1}{2}\Delta c_2 - 2)x_4,$$

e, per conservare le condizioni di ottimalità, la Δc_2 deve soddisfare le condizioni

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\Delta c_2 - 1 &\leq 0 \\ \frac{1}{2}\Delta c_2 &\leq 0 \\ \frac{1}{2}\Delta c_2 - 2 &\leq 0 \end{aligned} \implies -2 \leq \Delta c_2 \leq 0.$$

Analogamente, si ottengono i seguenti risultati

$$-\infty \leq \Delta c_3 \leq 0, \quad -\infty \leq \Delta c_4 \leq 2, \quad -\frac{2}{5} \leq \Delta c_5 \leq 0.$$

(b)

$$\begin{aligned} -\frac{9}{2} &\leq \Delta b_1 \leq +\infty, & -\infty &\leq \Delta b_2 \leq 9, & -8 &\leq \Delta b_3 \leq +\infty, \\ -\frac{17}{2} &\leq \Delta c_1 \leq +\infty, & -\infty &\leq \Delta c_2 \leq 17, & -4 &\leq \Delta c_3 \leq +\infty, \\ -2 &\leq \Delta c_4 \leq +\infty, & -\infty &\leq \Delta c_5 \leq 4. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} -18 &\leq \Delta b_1 \leq +\infty, & -2 &\leq \Delta b_2 \leq 22, & -\frac{22}{5} &\leq \Delta b_3 \leq 2 \\ -\infty &\leq \Delta c_1 \leq 9, & -6 &\leq \Delta c_2 \leq +\infty, & -\infty &\leq \Delta c_3 \leq 6, \\ -3 &\leq \Delta c_4 \leq +\infty, & -\infty &\leq \Delta c_5 \leq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} -\infty \leq \Delta b_1 \leq 11, & \quad -8 \leq \Delta b_2 \leq +\infty, & \quad -\frac{11}{3} \leq \Delta b_3 \leq +\infty \\ -\frac{23}{3} \leq \Delta c_1 \leq \frac{23}{2}, & \quad -\infty \leq \Delta c_2 \leq \frac{23}{5}, & \quad -\infty \leq \Delta c_3 \leq \frac{23}{5}, \\ -\frac{23}{5} \leq \Delta c_4 \leq +\infty, & \quad -\frac{23}{5} \leq \Delta c_5 \leq \frac{23}{10}. \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} -\frac{9}{2} \leq \Delta b_1 \leq 0, & \quad -9 \leq \Delta b_2 \leq +\infty, & \quad 0 \leq \Delta b_3 \leq \frac{9}{2}, \\ -\infty \leq \Delta c_1 \leq 12, & \quad -\infty \leq \Delta c_2 \leq \frac{6}{5}, & \quad -\infty \leq \Delta c_3 \leq 12, \\ -\infty \leq \Delta c_4 \leq \frac{12}{5}, & \quad -\frac{12}{5} \leq \Delta c_5 \leq +\infty. \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} -\frac{19}{3} \leq \Delta b_1 \leq +\infty, & \quad -10 \leq \Delta b_2 \leq 30, & \quad -15 \leq \Delta b_3 \leq \frac{19}{2} \\ -61 \leq \Delta c_1 \leq \frac{13}{3}, & \quad -\infty \leq \Delta c_2 \leq \frac{61}{14}, & \quad -\infty \leq \Delta c_3 \leq \frac{13}{14}, \\ -\infty \leq \Delta c_4 \leq \frac{13}{22}, & \quad -\frac{13}{7} \leq \Delta c_5 \leq \frac{61}{7}. \end{aligned}$$

3.3. Tutte le variazioni riguardano colonne associate a variabili non appartenenti alla base ottima.

(a) Il valore delle variabili duali all'ottimo è dato da

$$(u_1^* \quad u_2^*) = c_B A_{B_{ot}}^{-1} \mathbf{1} = (-2 \quad 0).$$

La variazione Δa_{14} impatta sul costo ridotto di x_4 con un contributo pari a

$$-u_1 \Delta a_{14} = 4 \quad \implies \quad \bar{\gamma}_4 = -2 + 4 = 2 > 0$$

Quindi la perturbazione specificata compromette l'ottimalità della base $\{x_2, x_5\}$.

(b) Le variabili duali all'ottimo valgono

$$(u_1^* \quad u_2^* \quad u_3^*) = c_B A_{B_{ot}}^{-1} \mathbf{1} = (4 \quad -2 \quad 3),$$

quindi il contributo a γ_5 della variazione Δa_{25} specificata è

$$-u_2^* \Delta a_{25} = -2 \quad \implies \quad \bar{\gamma}_5 = -4 - 2 = -6 < 0,$$

quindi non c'è perdita di ottimalità.

(c)-(d) Non si ha perdita di ottimalità.

(e) Si ha perdita di ottimalità.

(f) Non si ha perdita di ottimalità

Si può osservare che le perturbazioni che non compromettono l'ottimalità non alterano la soluzione ottima (ed il valore) sia per il primale che per il duale.

Capitolo 4

Programmazione intera

4.1. (a) Il problema in forma standard risulta

$$\max 2x_1 - x_2 - x_3$$

soggetto a

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 5$$

$$4x_2 + x_3 + x_5 = 5$$

$$x_1 - x_3 - x_6 = 2$$

$$x_1, \dots, x_6 \geq 0 \text{ intere,}$$

con x_4, \dots, x_6 variabili di slack (la cui interezza segue dall'interezza di tutti i coefficienti e termini noti). Rilassando il vincolo di interezza ed applicando l'algoritmo del simplesso si perviene alla seguente riformulazione ottima.

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 5 - 2x_2 - x_3 - x_4 \\ x_6 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_2 - x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_5 &= 5 - 4x_2 - x_3 \\ x_1 &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_1, \dots, x_6 &\geq 0. \end{aligned}$$

Poiché la soluzione prodotta non è intera, si seleziona una riga k con β_k non intero e si genera il taglio di Gomory ad essa associato. Il taglio in questione per la riga della x_6 è

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 \geq 0,$$

che inserito nella precedente riformulazione produce

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 5 - 2x_2 - x_3 - x_4 \\ x_6 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_2 - x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_5 &= 5 - 4x_2 - x_3 \\ x_1 &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 \\ y_1 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_1, \dots, x_6, y_1 &\geq 0. \end{aligned}$$

dalla quale, con un passo di simplesso duale si ottiene

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 4 & -x_2 & & -x_3 & & -2y_1 \\ x_6 &= 0 & & & -x_3 & & -y_1 \\ x_5 &= 5 & -4x_2 & & -x_3 & & \\ x_1 &= 2 & & & & & -y_1 \\ x_4 &= 1 & -x_2 & & & & +2y_1 \\ & & & & & & x_1, \dots, x_6, y_1 \geq 0. \end{aligned}$$

La soluzione con $x_1 = 2$, $x_4 = 1$, $x_5 = 5$, $x_2 = x_3 = x_6 = 0$ è intera ed ottima per il programma lineare intero iniziale, con valore ottimo $z = 4$.

(b) Applicando l'algoritmo del simplesso si può determinare la seguente riformulazione ottima.

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 8 & -3x_1 & & -x_4 & & -x_3 \\ x_2 &= \frac{8}{3} & -\frac{1}{3}x_1 & & -\frac{1}{3}x_4 & & \\ x_5 &= \frac{16}{3} & +\frac{1}{3}x_1 & & +\frac{1}{3}x_4 & & -2x_3 \\ x_6 &= \frac{20}{3} & -\frac{4}{3}x_1 & & -\frac{1}{3}x_4 & & \\ & & & & & & x_1, \dots, x_6 \geq 0. \end{aligned}$$

La soluzione non è intera; generando il taglio sulla riga di x_2 ($-\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 \geq 0$) si ha

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 8 & -3x_1 & & -x_4 & & -x_3 \\ x_2 &= \frac{8}{3} & -\frac{1}{3}x_1 & & -\frac{1}{3}x_4 & & \\ x_5 &= \frac{16}{3} & +\frac{1}{3}x_1 & & +\frac{1}{3}x_4 & & -2x_3 \\ x_6 &= \frac{20}{3} & -\frac{4}{3}x_1 & & -\frac{1}{3}x_4 & & \\ y_1 &= -\frac{2}{3} & +\frac{1}{3}x_1 & & +\frac{1}{3}x_4 & & \\ & & & & & & x_1, \dots, x_6, y_1 \geq 0, \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 6 & -2x_1 & & -3y_1 & & -x_3 \\ x_2 &= 2 & & & -y_1 & & \\ x_5 &= 7 & & & +y_1 & & -2x_3 \\ x_6 &= 9 & -x_1 & & -y_1 & & \\ x_4 &= 2 & -x_1 & & +3y_1 & & \\ & & & & & & x_1, \dots, x_6, y_1 \geq 0. \end{aligned}$$

La soluzione $x_2 = 2$, $x_5 = 7$, $x_6 = 9$, $x_4 = 2$, $x_1 = x_3 = 0$ è intera ed ottima per il programma originale, con valore ottimo $z = 6$.

(c) Soluzione ottima con $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_5 = 1$, $x_3 = x_4 = 0$, con valore ottimo $z = 7$.

(d) Soluzione ottima con $x_2 = 7$, $x_4 = 2$, $x_5 = 1$, $x_1 = x_3 = 0$, con valore ottimo $z = 14$.

(e) Soluzione ottima con $x_1 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$, $x_2 = 0$, valore ottimo $z = 1$. Esiste una soluzione alternativa con $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$, stesso valore ottimo.

(f) Il problema è in forma standard; dopo l'applicazione della fase 1 si perviene

alla seguente riformulazione

$$\begin{aligned} \max \quad z &= \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x_1 \\ x_2 &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x_1 \\ x_3 &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_1 \\ x_4 &= 1 - x_1 \\ x_1, \dots, x_4 &\geq 0, \end{aligned}$$

e, generando il taglio dalla riga di x_2 :

$$\begin{aligned} \max \quad z &= \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x_1 \\ x_2 &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x_1 \\ x_3 &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_1 \\ x_4 &= 1 - x_1 \\ y_1 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_1 \\ x_1, \dots, x_4, y_1 &\geq 0, \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 0 - 3y_1 \\ x_2 &= -1 - 3y_1 \\ x_3 &= 2 + 3y_1 \\ x_4 &= 0 - 2y_1 \\ x_1 &= 1 + 2y_1 \\ x_1, \dots, x_4, y_1 &\geq 0. \end{aligned}$$

La riga di x_2 presenta la condizione di illimitatezza duale, quindi il programma originale non ammette soluzione intera.

4.2. (a) La Figura 4.1(a) riporta la regione di ammissibilità del rilassamento lineare del problema (Nodo 0), costituita dalla figura ABCDE; l'ottimo frazionario è localizzato nel punto $C(x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = 0)$. Si ha quindi $LB = -\infty$, $UB = -\frac{5}{2}$. Eseguendo l'operazione di branch sulla variabile x_1 si ottengono i due nodi 1 ($x_1 \leq 2$) e 2 ($x_1 \geq 3$). I rispettivi sottoproblemi hanno regioni di ammissibilità delimitate dal trapezio DEHF (Nodo 1) con ottimo intero in $F(x_1 = 2, x_2 = 1)$ e dal segmento AB, con ottimo intero in $B(3, 0)$ (Nodo 2). Entrambi i nodi possono essere quindi cancellati subito, e l'ottimo del problema iniziale è nel punto F ($z = -3$) — nota: anche B è ottimo.

(b) La Figura 4.1(b) riporta la regione di ammissibilità del problema (triangolo ABC); l'ottimo (frazionario) è localizzato in $B(x_1 = 5, x_2 = \frac{9}{2})$; quindi si ha $LB = -\infty$, e $UB = 4$ al nodo 0. Effettuando il branch su x_2 si ottengono i nodi 1 ($x_2 \leq 4$) e 2 ($x_2 \geq 5$). Di questi, il 2 risulta immediatamente con regione ammissibile vuota e viene cancellato; il nodo 1 ha invece la regione di ammissibilità delimitata dal trapezio ADFC, con ottimo in $D(x_1 = \frac{14}{3}, x_2 = 4)$. Occorre quindi effettuare un nuovo branch su x_1 , generando i nodi 3 ($x_1 \leq 4$) e 4 ($x_1 \geq 5$). Le regioni di ammissibilità per i due nuovi sottoproblemi associati ai nodi sono rispettivamente il triangolo AEG, con ottimo intero in $E(4, 3)$, $UB = 2 \implies LB = 2$ ed il solo segmento CF, con ottimo intero in $F(5, 4)$, $UB = 3 \implies LB = 3$. Entrambi i nodi vengono quindi cancellati, ed il processo si arresta con soluzione ottima $x_1 = 5, x_2 = 4, z = 3$.

(c) Soluzione ottima con $x_1 = 2, x_2 = 1$, valore ottimo $z = 10$.

(d) Soluzione ottima con $x_1 = 0, x_2 = 2$, valore ottimo $z = -2$.

4.3. Per lavorare con più di due variabili, è vantaggioso utilizzare il semplice duale per gestire i vincoli addizionali in modo incrementale (analogamente al metodo di Gomory). (a) Come primo passo si risolve il *rilassamento lineare* (o *continuo*) del problema, partendo dalla forma standard

$$\max 2x_1 - x_2 - x_3$$

soggetto a

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 5$$

$$4x_2 + x_3 + x_5 = 5$$

$$x_1 - x_3 - x_6 = 2$$

$$x_1, \dots, x_6 \geq 0.$$

Risolvendo il problema di prima fase ed applicando il semplice si perviene alla riformulazione ottima

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 5 & -2x_2 & -x_3 & -x_4 \\ x_6 &= \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}x_2 & -x_3 & -\frac{1}{2}x_4 \\ x_5 &= 5 & -4x_2 & -x_3 & \\ x_1 &= \frac{5}{2} & -\frac{1}{2}x_2 & & -\frac{1}{2}x_4 \\ & & x_1, \dots, x_6 & \geq 0. & \end{aligned} \quad (\text{Nodo } 0)$$

Il nodo radice 0 ha quindi $UB = 5$. La soluzione trovata non è intera, quindi si assume $LB = -\infty$. A questo punto si sceglie una variabile con valore frazionario per eseguire l'operazione di branch. In questo caso si è scelto x_1 , generando i branch $x_1 \leq 2$ e $x_1 \geq 3$ (nodi 1 e 2 rispettivamente).

Disponendo della riformulazione ottima del nodo radice, i rilassamenti lineari associati ai nodi figli possono essere risolti in modo incrementale, facendo uso del semplice duale come accade nel metodo di Gomory. In particolare facendo uso dell'uguaglianza relativa ad x_1 si possono esprimere i due vincoli addizionali come

$$\begin{aligned} x_1 \leq 2 &\iff \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 \leq 2 &\iff -\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 + y_1 = -\frac{1}{2}, \\ x_1 \geq 3 &\iff \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 \geq 3 &\iff -\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 - y_2 = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

facendo uso della variabile di slack y_1 e della variabile di surplus y_2 rispettivamente. *Nota:* questi vincoli *non* sono tagli di Gomory, ma per la forma in cui sono stati posti possono essere introdotti nella riformulazione e la riottimizzazione dei sottoproblemi avviene tramite il semplice duale; questo evita di riavviare il semplice da zero per risolvere i nuovi nodi.

Per il nodo 1, inserendo y_1 nella riformulazione ottima del nodo padre 0 si ottiene allora

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 5 & -2x_2 & -x_3 & -x_4 \\ x_6 &= \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}x_2 & -x_3 & -\frac{1}{2}x_4 \\ x_5 &= 5 & -4x_2 & -x_3 & \\ x_1 &= \frac{5}{2} & -\frac{1}{2}x_2 & & -\frac{1}{2}x_4 \\ y_1 &= -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2}x_2 & & +\frac{1}{2}x_4 \\ & & x_1, \dots, x_6, y_1 & \geq 0. & \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \max \quad z = & 4 & -x_2 & -x_3 & -2y_1 \\ x_6 = & 0 & & -x_3 & -y_1 \\ x_5 = & 5 & -4x_2 & -x_3 & \\ x_1 = & 2 & & & -y_1 \\ x_4 = & 1 & -x_2 & & +2y_1 \\ & & & & x_1, \dots, x_6, y_1 \geq 0. \end{aligned}$$

Il nodo 1 viene quindi chiuso per ottimalità, e si ha $LB = 4$. Per il nodo 2, aggiungendo il vincolo $x_1 \geq 3$ si ottiene la riformulazione

$$\begin{aligned} \max \quad z = & 5 & -2x_2 & -x_3 & -x_4 \\ x_6 = & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}x_2 & -x_3 & -\frac{1}{2}x_4 \\ x_5 = & 5 & -4x_2 & -x_3 & \\ x_1 = & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2}x_2 & & -\frac{1}{2}x_4 \\ y_2 = & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}x_2 & & -\frac{1}{2}x_4 \\ & & & & x_1, \dots, x_6, y_2 \geq 0, \end{aligned}$$

che presenta la condizione di illimitatezza duale; quindi il sottoproblema associato a questo nodo ha regione ammissibile vuota ed il nodo viene chiuso. Non essendoci altri nodi da processare, l'algoritmo si arresta con la soluzione ottima trovata al nodo 1. L'albero di branch è riportato in Figura 4.2(a).

(b) Soluzione ottima con $x_2 = 2$, $x_5 = 7$, $x_6 = 9$, $x_4 = 2$, $x_1 = x_3 = 0$, con valore ottimo $z = 6$.

(c) La soluzione del rilassamento lineare fornisce la riformulazione

$$\begin{aligned} \max \quad z = & 8 & -x_4 & -x_5 & -x_3 \\ x_1 = & \frac{7}{4} & -\frac{1}{2}x_4 & +\frac{1}{4}x_5 & +\frac{3}{4}x_3 \\ x_2 = & \frac{3}{2} & & -\frac{1}{2}x_5 & -\frac{1}{2}x_3 \\ & & & & x_1, \dots, x_5 \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{Nodo 0})$$

Effettuando il branch su x_1 si generano i nodi 1 ($x_1 \leq 1$) e 2 ($x_1 \geq 2$). Per il nodo 1, inserendo il vincolo $x_1 \leq 1$ si ha

$$\begin{aligned} \max \quad z = & 8 & -x_4 & -x_5 & -x_3 \\ x_1 = & \frac{7}{4} & -\frac{1}{2}x_4 & +\frac{1}{4}x_5 & +\frac{3}{4}x_3 \\ x_2 = & \frac{3}{2} & & -\frac{1}{2}x_5 & -\frac{1}{2}x_3 \\ y_1 = & -\frac{3}{4} & +\frac{1}{2}x_4 & -\frac{1}{4}x_5 & -\frac{3}{4}x_3 \\ & & & & x_1, \dots, x_5, y_1 \geq 0. \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \max \quad z = & \frac{13}{2} & -2y_1 & -\frac{3}{2}x_5 & -\frac{5}{2}x_3 \\ x_1 = & 1 & -y_1 & & \\ x_2 = & \frac{3}{2} & & -\frac{1}{2}x_5 & -\frac{1}{2}x_3 \\ x_4 = & \frac{3}{2} & +2y_1 & +\frac{1}{2}x_5 & +\frac{3}{2}x_3 \\ & & & & x_1, \dots, x_5, y_1 \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{Nodo 1})$$

Per il nodo 2 si ha

$$\begin{aligned} \max \quad z = & 8 & -x_4 & -x_5 & -x_3 \\ x_1 = & \frac{7}{4} & -\frac{1}{2}x_4 & +\frac{1}{4}x_5 & +\frac{3}{4}x_3 \\ x_2 = & \frac{3}{2} & & -\frac{1}{2}x_5 & -\frac{1}{2}x_3 \\ y_2 = & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2}x_4 & +\frac{1}{4}x_5 & +\frac{3}{4}x_3 \\ & & & & x_1, \dots, x_5, y_2 \geq 0. \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
 \max \quad z &= \frac{23}{3} - \frac{5}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 - \frac{4}{3}y_2 \\
 x_1 &= 2 + y_2 \\
 x_2 &= \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 - \frac{2}{3}y_2 \\
 x_3 &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 + \frac{4}{3}y_2 \\
 x_1, \dots, x_5, y_2 &\geq 0
 \end{aligned} \tag{Nodo 2}$$

Nessuno dei due nodi presenta una soluzione intera, pertanto si assume ancora $LB = -\infty$. Uno dei nodi deve quindi essere selezionato per effettuare un branch. Operando sul nodo 2, si generano i nodi 3 ($x_2 \leq 1$) e 4 ($x_2 \geq 2$). Per il nodo 3, procedendo in modo analogo a prima si introduce il vincolo

$$x_2 \leq 1 \iff \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 - \frac{2}{3}y_2 \leq 1 \iff -\frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 - \frac{2}{3}y_2 + y_3 = -\frac{1}{3},$$

nella riformulazione ottima del nodo padre 2 e si ha

$$\begin{aligned}
 \max \quad z &= \frac{23}{3} - \frac{5}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 - \frac{4}{3}y_2 \\
 x_1 &= 2 + y_2 \\
 x_2 &= \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 - \frac{2}{3}y_2 \\
 x_3 &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 + \frac{4}{3}y_2 \\
 y_3 &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 + \frac{2}{3}y_2 \quad x_1, \dots, x_5, y_2, y_3 \geq 0,
 \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
 \max \quad z &= 7 - x_4 - 2y_3 \\
 x_1 &= 2 + y_2 \\
 x_2 &= 1 - y_3 \\
 x_3 &= 0 + x_4 - y_3 + 2y_2 \\
 x_5 &= 1 - x_4 + 3y_3 - 2y_2 \\
 x_1, \dots, x_5, y_2, y_3 &\geq 0.
 \end{aligned} \tag{Nodo 3}$$

Avendo soluzione intera, il nodo 3 è chiuso per ottimalità; inoltre si imposta $LB = 7$, ed in base a questo si può cancellare il nodo 1 che ha un upper bound di $\frac{13}{2}$. Infine, si verifica facilmente che il nodo 4 viene chiuso per inammissibilità. L'albero di branch è riportato in Figura 4.2(c).

(d) Soluzione ottima con $x_2 = 7$, $x_4 = 2$, $x_5 = 1$, $x_1 = x_3 = 0$, valore ottimo $z = 14$.

(e) Soluzione ottima con $x_1 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$, $x_2 = 0$, valore ottimo $z = 1$.

(f) Non ha soluzioni intere.

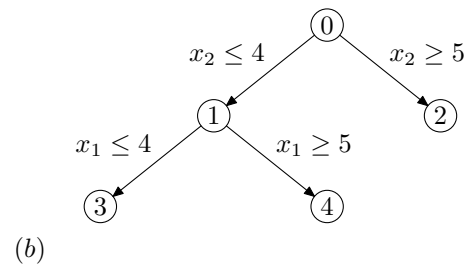
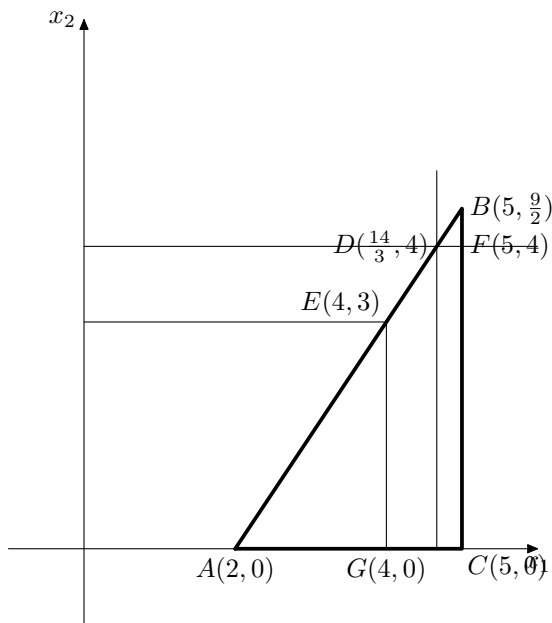
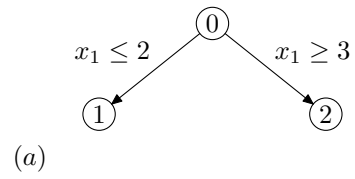
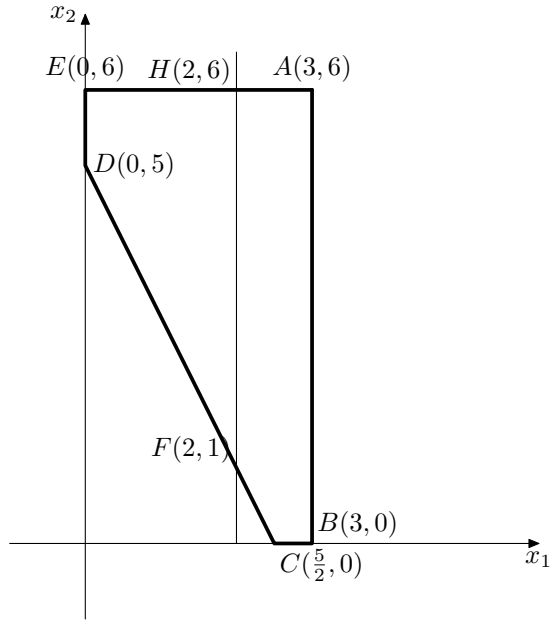


Figura 4.1: Regioni di ammissibilità e alberi di branch.

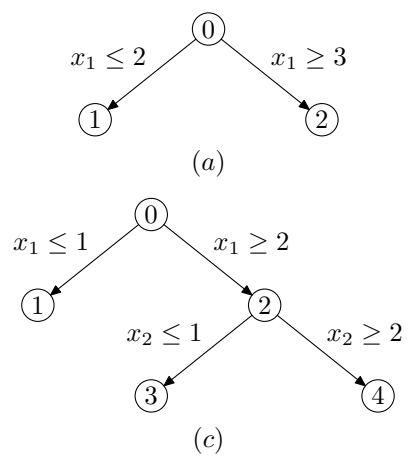


Figura 4.2: Alberi di branch.

Capitolo 5

Introduzione ai grafi

5.1. (a) Seguendo l'algoritmo noto per la determinazione delle componenti connesse, si parte con un insieme di nodi $W = V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. Si pone $S = \{a\}$, $T_1 = \emptyset$, quindi si procede iterativamente come segue.

1. $S := S - \{a\} \cup \{b, e\} = \{b, e\};$
 $T_1 := \{a\};$
2. $S := S - \{b\} \cup \{c\} = \{e, c\};$
 $T_1 := T_1 \cup \{b\} = \{a, b\};$
3. $S := S - \{e\} \cup \{c, d, g\} = \{c, d, g\};$
 $T_1 := T_1 \cup \{e\} = \{a, b, e\};$
4. $S := S - \{c\} \cup f = \{d, g, f\};$
 $T_1 := T_1 \cup \{c\} = \{a, b, e, c\};$
5. $S := S - \{d\} \cup \{f\} = \{g, f\};$
 $T_1 := T_1 \cup \{d\} = \{a, b, e, c, d\};$
6. $S := S - \{g\} \cup \{f\} = \{f\};$
 $T_1 := T_1 \cup \{g\} = \{a, b, e, c, d, g\};$
7. $S := S - \{f\} \cup \emptyset = \emptyset;$
 $T_1 := T_1 \cup \{f\} = \{a, b, e, c, d, g, f\};$

infine, essendo $S = \emptyset$, si calcola $W := W - T_1 = \emptyset$, e quindi l'algoritmo termina con una singola componente connessa T_1 , quindi G è connesso.

(b) Ponendo $W = V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$, si procede dapprima alla ricerca della prima componente connessa T_1 . Sia $S = \{a\}$, $T_1 = \emptyset$, quindi

1. $S := S - \{a\} \cup \{c, h\} = \{c, h\};$
 $T_1 := T_1 \cup \{a\} = \{a\};$
2. $S := S - \{c\} \cup \{e\} = \{h, e\};$
 $T_1 := T_1 \cup \{c\} = \{a, c\};$
3. $S := S - \{h\} \cup \{e\} = \{e\};$
 $T_1 := T_1 \cup \{h\} = \{a, c, h\};$

$$\begin{aligned} 4. \quad S &:= S - \{e\} \cup \emptyset = \emptyset; \\ T_1 &:= T_1 \cup \{e\} = \{a, c, h, e\}; \end{aligned}$$

quindi $T_1 = \{a, c, h, e\}$ è una componente connessa di G ; ricalcolando $W := W - T_1 = \{b, d, f, g, i\} \neq \emptyset$, si conclude che esistono altre componenti connesse da identificare. Quindi si pone $s = \{b\}$, $T_2 = \emptyset$ e si ha

$$\begin{aligned} 1. \quad S &:= S - \{b\} \cup \{d, g\} = \{d, g\}; \\ T_2 &:= T_2 \cup \{b\}; \\ 2. \quad S &:= S - \{d\} \cup \{f, i\} = \{g, f, i\}; \\ T_2 &:= T_2 \cup \{d\} = \{b, d\}; \\ 3. \quad S &:= S - \{g\} \cup \{f\} = \{f, i\}; \\ T_2 &:= T_2 \cup \{g\} = \{b, d, g\}; \\ 4. \quad S &:= S - \{f\} \cup \emptyset = \{i\}; \\ T_2 &:= T_2 \cup \{f\} = \{b, d, g, f\}; \\ 5. \quad S &:= S - \{i\} \cup \emptyset = \emptyset; \\ T_2 &:= T_2 \cup \{i\} = \{b, d, g, f, i\}; \end{aligned}$$

essendo $W - T_2 = \emptyset$, l'algoritmo termina. Sono state identificate le componenti connesse $T_1 = \{a, c, e, h\}$ e $T_2 = \{b, d, g, f, i\}$, quindi G non è connesso.

(c) Si hanno $T_1 = \{b, c, d, e, f\}$ e $T_2 = \{a, g, h\}$, quindi G non è connesso.

(d) Si ha $T_1 = \{a, b, c, d, e, f\} = V$, quindi G è connesso.

(e) Si hanno $T_1 = \{a, b, c, f\}$ e $T_2 = \{d, e, g\}$, quindi G non è connesso.

(f) Si ha $T_1 = \{a, b, c, d, e, f, g, h\} = V$, quindi G è connesso.

5.2. (a) Applicando l'algoritmo per il riconoscimento dei grafi bipartiti, si ponga $W = V$ e si proceda come segue.

$$\begin{array}{ll} \frac{C_1 : a}{C_2 :} & T_2 = \{b, e\} \\ \frac{C_1 : a}{C_2 : b, e} & T_1 = \{g, d, c\}; \\ \frac{C_1 : a, g, d, c}{C_2 : b, e} & T_2 = \{f\}; \\ \frac{C_1 : a, g, d, c}{C_2 : b, e, f} & T_1 = \emptyset, T_2 = \emptyset. \end{array}$$

Poiché $T_1 = T_2 = \emptyset$ e $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, $W = W - (C_1 \cup C_2) = \emptyset$, il grafo G risulta bipartito, con $V_1 = \{a, c, d, g\}$ e $V_2 = \{b, e, f\}$.

(b) Si ponga $W = V$, $T_1 = \{a\}$ e si ottiene

$$\begin{array}{ll} \frac{C_1 : a}{C_2 :} & T_2 = \{c, h\} \\ \frac{C_1 : a}{C_2 : c, h} & T_1 = \{e\} \\ \frac{C_1 : a, e}{C_2 : c, h} & T_2 = \emptyset, T_1 = \emptyset. \end{array}$$

Poiché $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, non si ha indicazione di grafo non bipartito. Si ponga ora $W = V - (C_1 \cup C_2) = \{b, d, f, g, i\}$. Essendo $W \neq \emptyset$, si ponga $T_1 = \{b\}$ e si ottiene

$$\begin{array}{l} \frac{C_1 : b}{C_2 :} \\ \frac{C_1 : b}{C_2 : g, d} \\ \frac{C_1 : b, f, i}{C_2 : g, d} \end{array} \quad \begin{array}{l} T_2 = \{g, d\} \\ T_1 = \{f, i\} \\ T_2 = \emptyset, T_1 = \emptyset. \end{array}$$

Ora $W = W - (C_1 \cup C_2) = \emptyset$ e quindi G è bipartito, con $V_1 = \{a, b, e, f, i\}$ e $V_2 = \{c, d, g, h\}$.

(c) Procedendo analogamente ad (a) si ottiene:

$$\begin{array}{l} \frac{C_1 : a}{C_2 :} \\ \frac{C_1 : a}{C_2 : g, h} \\ \frac{C_1 : a, g, h}{C_2 : g, h} \end{array} \quad \begin{array}{l} T_2 = \{g, h\} \\ T_1 = \{g, h\} \\ C_1 \cap C_2 \neq \emptyset. \end{array}$$

Quindi il grafo G non è bipartito. (d)–(f) Non bipartiti.

5.3. (a) Ordinando gli archi del grafo per costi crescenti si ottiene la lista

$$\begin{array}{l} (a, c), (c, b), (c, a), (c, d), (e, c), (a, b), \\ (b, c), (d, b), (e, a), (a, d), (d, e), (b, a), \\ (e, b), (a, e). \end{array}$$

La scelta “greedy” dell’algoritmo base produce i seguenti passi:

1. Si sceglie $(a, c) \implies A_T = \{(a, c)\}$;
2. Si sceglie $(c, b) \implies A_T = \{(a, c), (c, b)\}$;
3. Si considera (c, a) che viene scartato (crea il ciclo a, c, a);
4. Si sceglie $(c, d) \implies A_T = \{(a, c), (c, b), (c, d)\}$;
5. Si sceglie $(e, c) \implies A_T = \{(a, c), (c, b), (c, d), (e, c)\}$, ed essendo $\text{card}(A_T) = \text{card}(V) - 1$ ci si ferma.

Lo spanning tree di costo minimo è $T(V, A_T)$, con $w(T) = 1 + 2 + 4 + 4 = 11$.

Applicando la seconda versione dell’algoritmo per la determinazione dello spanning tree di costo minimo, si procede come segue.

1. Si pone $U := \{a\}$, $A_T := \emptyset$; si determinano $e_b = (a, b)$, $e_c = (a, c)$, $e_d = (a, d)$, $e_e = (e, a)$ (archi di costo minimo che collegano i nodi all’albero parziale);
2. Si sceglie l’arco e_v , $v \notin U$ di costo minimo, che risulta essere $e_c = (a, c)$, quindi si pone $U := U \cup \{c\}$, $A_T := A_T \cup \{(a, c)\}$;

3. Si aggiornano gli e_v , $v \notin U$: risulta $e_b = (c, b)$, $e_d = (c, d)$, $e_e = (e, c)$;
4. Si sceglie il nuovo arco di costo minimo, $e_b = (c, b)$, quindi $U := \{a, b, c\}$ e $A_T = \{(a, c), (c, b)\}$;
5. Si verifica che gli e_v , $v \notin U$, non cambiano: $e_d = (c, d)$, $e_e = (e, c)$;
6. Si sceglie l'arco di costo minimo, $e_d = (c, d)$ e quindi $U := \{a, b, c, d\}$, $A_T := \{(a, c), (c, b), (c, d)\}$;
7. Infine si aggiorna $e_e = (e, c)$ (qui non varia) e si aggiunge quest'ultimo arco all'albero.

Risulta, come sopra, $T(V, A_T)$ con $w(T) = 11$.

(b) $A_T = \{(a, e), (b, c), (b, e), (e, d)\}$ (non necessariamente nell'ordine di selezione), $w(T) = 10$. Un altro albero equivalente si ottiene sostituendo (a, e) con (a, b) .

(c) $A_T = \{(a, d), (b, d), (c, e), (d, e)\}$, $w(T) = 9$.

(d) $A_T = \{(a, e), (b, c), (b, d), (d, e)\}$, $w(T) = 12$. Un albero equivalente si ottiene sostituendo (d, e) con (a, d) .

(e) $A_T = \{(b, a), (b, c), (b, d), (b, e), (e, f)\}$, $w(T) = 16$.

(f) $A_T = \{(a, d), (b, d), (c, e), (d, e), (f, e)\}$, $w(T) = 12$.

Capitolo 6

Problemi di flusso a costo minimo

- 6.1. (a) B_1 è una base, infatti i suoi archi formano un albero di supporto per il grafo di Figura 6.1(a). Formando i vincoli di conservazione del flusso limitati alle variabili in base, si ottiene

$$\begin{aligned}x_{12} &= 5 \\-x_{12} + x_{23} + x_{26} &= 0 \\-x_{23} &= 0 \\-x_{26} - x_{56} + x_{67} &= 0 \\x_{56} - x_{45} &= 0 \\x_{45} &= 6 \\x_{78} - x_{67} &= -7 \\-x_{78} &= -4\end{aligned}$$

che ammette la soluzione (unica) non negativa

$$\begin{aligned}x_{12} &= 5, & x_{23} &= 0, & x_{26} &= 5, & x_{45} &= 6, \\x_{56} &= 6, & x_{67} &= 11, & x_{78} &= 4.\end{aligned}$$

B_2 è una base, infatti i suoi archi formano un albero di supporto del grafo di Figura 6.1(a); tuttavia, formando i vincoli di conservazione del flusso, si ottiene il sistema

$$\begin{aligned}x_{13} + x_{14} &= 5 \\-x_{23} &= 0 \\x_{35} + x_{36} - x_{13} + x_{23} &= 0 \\-x_{14} &= 6 \\x_{58} - x_{35} &= 0 \\-x_{36} &= 0 \\x_{78} &= -7 \\-x_{58} - x_{78} &= -4\end{aligned}$$

che *non ammette* soluzioni non negative. Quindi B_2 è una base *non ammissibile*. B_3 *non* è una base, infatti contiene il ciclo formato dagli archi $\{(1, 2), (2, 6), (5, 6), (4, 5), (1, 4)\}$, quindi i vettori corrispondenti agli archi di B_3 non sono linearmente indipendenti.

(b) B_1 è una base in quanto i suoi archi formano un albero di supporto del grafo di Figura 6.1, ma è una base non ammissibile in quanto i vincoli di conservazione del flusso ristretti alle variabili di B_1 non ammettono soluzione non negativa (verificare). B_2 è una base in quanto i suoi archi formano un albero di supporto; dai vincoli di conservazione del flusso si ottiene

$$\begin{array}{lll} x_{13} = 16, & x_{35} = 0, & x_{36} = 16 \\ x_{41} = 6, & x_{62} = 8, & x_{67} = 8. \end{array}$$

B_3 è una base in quanto i suoi archi formano un albero di supporto; dai vincoli di conservazione del flusso si ottiene

$$\begin{array}{lll} x_{13} = 10, & x_{35} = 2, & x_{36} = 8 \\ x_{45} = 6, & x_{57} = 8, & x_{62} = 8. \end{array}$$

(c) B_1 è una base in quanto i suoi archi formano un albero di supporto del grafo di Figura 6.1(c). Il valore delle variabili in base è

$$\begin{array}{lll} x_{12} = 5, & x_{23} = 1, & x_{24} = 3 \\ x_{45} = 2, & x_{56} = 1. & \end{array}$$

B_2 è una base non ammissibile, in quanto i suoi archi formano un albero di supporto, ma i vincoli di conservazione del flusso non ammettono soluzione non negativa. B_3 non è una base: contiene il ciclo formato dagli archi $\{(2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$.

(d) B_1 è una base non ammissibile: i suoi archi formano un albero di supporto, ma i vincoli di conservazione del flusso non ammettono soluzione non negativa (verificare). Stesso risultato per B_2 ; B_3 è una base che determina

$$\begin{array}{lll} x_{12} = 2, & x_{16} = 10, & x_{32} = 8, \\ x_{34} = 10, & x_{53} = 10. & \end{array}$$

(e) B_1 è una base che determina

$$\begin{array}{llll} x_{12} = 10, & x_{13} = 0, & x_{24} = 10, & x_{35} = 0, \\ x_{48} = 10, & x_{63} = 0, & x_{87} = 5. & \end{array}$$

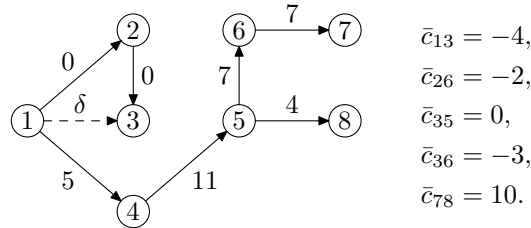
B_2 e B_3 sono basi non ammissibili (verificare).

(f) B_1 è una base che determina

$$\begin{array}{lll} x_{12} = 8, & x_{25} = 10, & x_{36} = 10, \\ x_{42} = 2, & x_{47} = 6, & x_{53} = 10. \end{array}$$

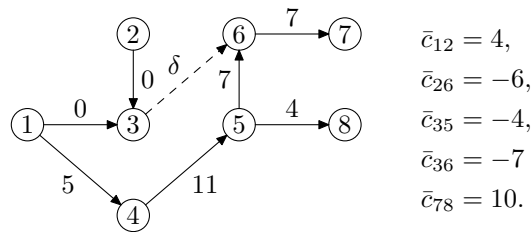
B_2 e B_3 sono basi non ammissibili.

- 6.2. (a) La base B_0 con i valori di x_{ij} riportati sugli archi è rappresentata di seguito, insieme ai valori dei costi ridotti \bar{c}_{ij} relativi agli archi fuori base.



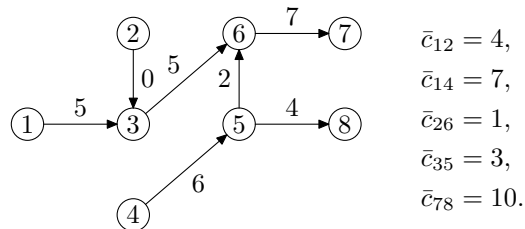
La variabile entrante, scelta con il criterio del minimo costo ridotto è x_{13} , che entra con valore $\delta = \min\{x_{12}, x_{23}\} = 0$. La variabile uscente risulta x_{12} (anche x_{23} è una scelta lecita). Allora (spostando uno “zero pesante”) si ottiene

$$B_1 = B_0 + (1, 3) - (1, 2) = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (4, 5), (5, 6), (5, 8), (6, 7)\}$$



Entra quindi in base x_{36} , con valore $\delta = \min\{x_{14}, x_{45}, x_{56}\} = 5$, esce x_{14} . Risulta allora

$$B_2 = B_1 + (3, 6) - (1, 4) = \{(1, 3), (2, 3), (3, 6), (4, 5), (5, 6), (5, 8), (6, 7)\}$$



La base B_2 risulta quindi ottima.

- (b) Basi, valori di flusso e costi ridotti risultano come segue:

$$B_0 = \{(1, 3), (1, 6), (3, 5), (4, 1), (5, 7), (6, 2)\},$$

$$x_{13} = 8, \quad x_{16} = 8, \quad x_{35} = 8,$$

$$x_{41} = 6, \quad x_{58} = 8, \quad x_{62} = 8,$$

e costi ridotti

$$\bar{c}_{21} = 17, \quad \bar{c}_{36} = -4, \quad \bar{c}_{45} = -4,$$

$$\bar{c}_{67} = 8, \quad \bar{c}_{72} = -3.$$

La variabile entrante risulta x_{36} (alternativamente, x_{45} se l'unica discriminante è il costo ridotto). La x_{36} entra in base con valore di flusso $x_{36} = \delta = \min\{x_{16}\} =$

8. Esce la x_{16} . Si ha

$$\begin{aligned} B_1 &= \{(1, 3), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 7), (6, 2)\}, \\ x_{13} &= 16, \quad x_{35} = 8, \quad x_{36} = 8, \\ x_{41} &= 6, \quad x_{58} = 8, \quad x_{62} = 8, \end{aligned}$$

e costi ridotti

$$\begin{aligned} \bar{c}_{16} &= 4, \quad \bar{c}_{21} = 13, \quad \bar{c}_{45} = -4, \\ \bar{c}_{67} &= 4, \quad \bar{c}_{72} = 5. \end{aligned}$$

Entra in base x_{45} con valore $\delta = \min\{x_{13}, x_{35}\} = 6$. Esce x_{41} .

$$\begin{aligned} B_2 &= \{(1, 3), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (5, 7), (6, 2)\}, \\ x_{13} &= 10, \quad x_{35} = 2, \quad x_{36} = 8, \\ x_{45} &= 6, \quad x_{58} = 8, \quad x_{62} = 8, \end{aligned}$$

e costi ridotti

$$\begin{aligned} \bar{c}_{16} &= 4, \quad \bar{c}_{14} = 4, \quad \bar{c}_{21} = 13, \\ \bar{c}_{67} &= 4, \quad \bar{c}_{72} = 5. \end{aligned}$$

La base B_2 è ottima.

(c) Risulta

$$\begin{aligned} B_0 &= \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)\} \quad (\bar{c}_{24} = -9), \\ B_1 &= \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (4, 5), (5, 6)\} \end{aligned}$$

ottima con $x_{12} = 5$, $x_{23} = 1$, $x_{24} = 3$, $x_{45} = 2$, $x_{56} = 1$ (verificare).

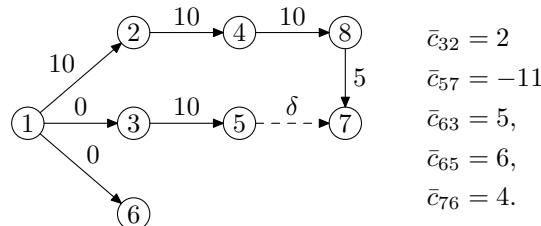
(d) Risulta

$$\begin{aligned} B_0 &= \{(1, 2), (2, 6), (3, 4), (4, 6), (5, 4)\} \quad (\bar{c}_{56} = -6), \\ B_1 &= \{(1, 2), (2, 6), (3, 4), (5, 4), (5, 6)\} \quad (\bar{c}_{24} = -1), \\ B_2 &= \{(1, 2), (2, 4), (3, 4), (5, 4), (5, 6)\}, \end{aligned}$$

ottima con $x_{12} = 12$, $x_{24} = 2$, $x_{34} = 8$, $x_{54} = 0$, $x_{56} = 10$ (verificare).

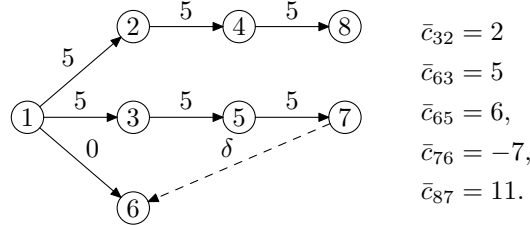
(e) La base iniziale B_0 con valori dei flussi e costi ridotti relativi agli archi fuori base è riportata di seguito.

$$B_0 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 6), (2, 4), (3, 5), (4, 8), (8, 7)\},$$



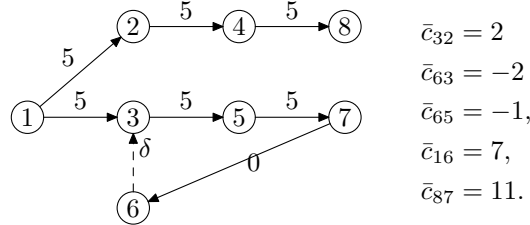
Entra $x_{57} = \delta = 5$, esce x_{87} .

$$B_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 6), (2, 4), (3, 5), (4, 8), (5, 7)\},$$



Entra $x_{76} = \delta = 0$, esce x_{16} . Si noti lo spostamento dello “0 pesante”.

$$B_2 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 8), (5, 7), (7, 6)\},$$



La variabile x_{63} è selezionata per entrare in base, ma il ciclo $\{(6, 3), (3, 5), (5, 7), (7, 6)\}$ (che è anche un *circuito*) non permette la selezione di una variabile uscente. Questo indica la presenza di una soluzione illimitata.

(f) Risulta

$$B_0 = \{(1, 2), (2, 5), (3, 6), (4, 2), (5, 3), (5, 7)\} \quad (\bar{c}_{47} = -9),$$

$$B_1 = \{(1, 2), (2, 5), (3, 6), (4, 2), (4, 7), (5, 3)\},$$

con $x_{12} = 8$, $x_{25} = x_{53} = x_{36} = 10$, $x_{42} = 2$, $x_{47} = 6$ (verificare).

6.3. Si osservi che G possiede (almeno) un circuito C con costo totale negativo (ad esempio $C = \{(6, 5), (5, 7), (7, 6)\}$). Data una soluzione ammissibile (non necessariamente di base), \bar{x}_{ij} , ed un $\Delta_C > 0$, si definisca la soluzione $\hat{x}_{ij} = \bar{x}_{ij} + \Delta_C$ se $(i, j) \in C$, altrimenti $\hat{x}_{ij} = \bar{x}_{ij}$. Si possono constatare i seguenti fatti.

(1) Le \hat{x}_{ij} soddisfano i vincoli di bilanciamento del flusso, cioè formano una soluzione ammissibile. Infatti per qualunque nodo $i \in V$:

- se $i \notin C$, il bilanciamento al nodo i è sicuramente soddisfatto:

$$\sum_{j: (i,j) \in A} \hat{x}_{ij} - \sum_{j: (j,i) \in A} \hat{x}_{ji} = \sum_{j: (i,j) \in A} \bar{x}_{ij} - \sum_{j: (j,i) \in A} \bar{x}_{ji} = b_i.$$

- se $i \in C$, esiste un unico arco di C che entra in i ed un unico arco che ne esce, quindi

$$\sum_{j: (i,j) \in A} \hat{x}_{ij} - \sum_{j: (j,i) \in A} \hat{x}_{ji} = \sum_{j: (i,j) \in A} \bar{x}_{ij} + \Delta_C - \sum_{j: (j,i) \in A} \bar{x}_{ji} - \Delta_C = b_i.$$

- (2) Si possono definire \hat{x}_{ij} per valori di Δ_C *arbitrariamente* grandi.
 (3) Tale procedimento si può applicare a qualunque circuito del grafo.

Quindi ogni flusso su G non è definito in modo univoco, ma a meno di costanti Δ_C non negative arbitrarie legate ai circuiti del grafo. Il costo addizionale di questo “flusso fantasma” Δ_C è pari a $\Delta_C (\sum_{(i,j) \in C} c_{ij})$. La presenza di un ciclo di costo totale negativo dà quindi la possibilità di generare soluzioni con costo arbitrariamente basso (tendente a $-\infty$ per $\Delta_C \rightarrow \infty$).

Nota. Le soluzioni di base considerate dal simpleso corrispondono sempre a flussi per i quali $\Delta_C = 0$ (le soluzioni di base non possono — ovviamente — contenere circuiti).

- 6.4.** Applicando le considerazioni dell’esercizio precedente (basta porre $\bar{x}_{ij} = 0$), se G contiene almeno un circuito C , la soluzione non negativa

$$\hat{x}_{ij} = \begin{cases} \Delta, & \text{se } (i, j) \in C, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

è ammissibile, per ogni $\Delta \geq 0$ (verificare).

- 6.5.** In base alle considerazioni dei due esercizi precedenti, quando G contiene circuiti è possibile costruire soluzioni con variabili a valori arbitrariamente grandi, e quindi la regione di ammissibilità è un poliedro illimitato. Quando G non contiene circuiti tale costruzione non è possibile, e la regione di ammissibilità è un politopo o poliedro convesso.
- 6.6.** (a) Il problema della prima fase si imposta aggiungendo il nodo artificiale q e gli archi $(1, q)$, $(q, 2)$, $(q, 3)$, $(q, 4)$, $(q, 5)$. Una base ammissibile è effettivamente

$$B_0 = \{(1, q), (q, 2), (q, 3), (q, 4), (q, 5)\},$$

con $x_{1q} = x_{q3} = 10$, $x_{q2} = x_{q4} = x_{q5} = 0$, e

$$\begin{aligned} r_{12} = -2, \quad r_{14} = -2, \quad r_{23} = 0, \quad r_{24} = 0, \\ r_{43} = 0, \quad r_{53} = 0, \quad r_{54} = 0. \end{aligned}$$

Entra in base x_{12} con valore $\delta = 0$, esce x_{12} . Quindi si ha

$$\begin{aligned} B_1 &= \{(1, q), (1, 2), (q, 3), (q, 4), (q, 5)\}, & (r_{23} = -2) \\ B_2 &= \{(1, q), (1, 2), (1, 3), (q, 4), (q, 5)\}, & (r_{24} = -2) \\ B_3 &= \{(1, q), (1, 2), (1, 3), (2, 4), (q, 5)\}, & (r_{35} = -2) \\ B_4 &= \{(1, q), (1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5)\} & (\text{ottimo}). \end{aligned}$$

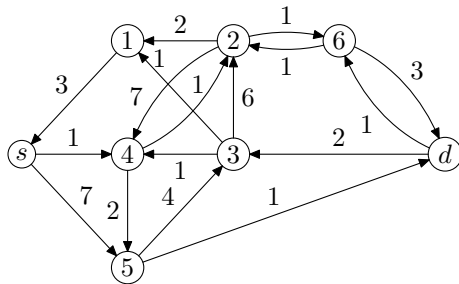
Quindi $B = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5)\}$ è una base ammissibile con $x_{12} = x_{13} = 10$, $x_{24} = x_{35} = 0$. (b) Non esiste una base ammissibile.

- 6.7.** Se il problema ammette soluzioni ammissibili, allora la base finale prodotta dalla procedura per la determinazione della soluzione iniziale *deve* essere degenere. Infatti il nodo supplementare q deve essere collegato da (esattamente) un arco all’albero di supporto corrispondente alla base finale. Inoltre se esiste una soluzione ammissibile tale arco deve essere scarico (altrimenti la soluzione della prima fase non avrebbe costo nullo).

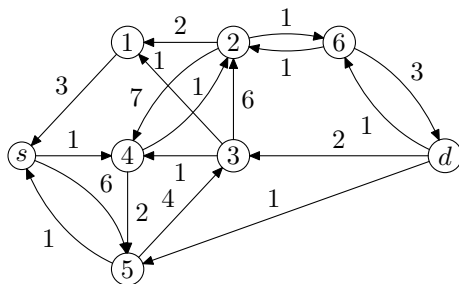
Capitolo 7

Problema del massimo flusso

- 7.1. (a) A partire dal flusso iniziale specificato (totale $f = 3$), si ottiene il primo grafo di scarto, riportato di seguito.



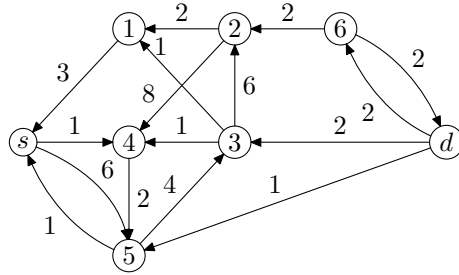
Si noti che $(4, 2)$, $(6, 2)$, $(d, 6)$ sono archi *backward*. Un possibile cammino orientato $s - d$ è $(s, 5, d)$, che dà $\Delta = \min\{7, 1\} = 1$. Si aumenta quindi di 1 il flusso lungo gli archi $(s, 5)$ e $(5, d)$ del grafo originale, ottenendo $x_{s5} = x_{5d} = 1$ e portando il flusso totale a $f = 4$. Ridisegnando il grafo di scarto per il nuovo flusso, si ottiene



sul quale esiste il cammino $s - d$ $(1, 4, 2, 6, d)$. Si noti che questo cammino utilizza l'arco *backward* $(4, 2)$. Risulta $\Delta = \min\{1, 1, 1, 3\} = 1$, ed i nuovi flussi degli archi interessati sono

$$\begin{aligned} x_{s4} &= 1, & x_{24} &= 1 - 1 = 0, & x_{26} &= 1 + 1 = 2, \\ x_{6d} &= 1 + 1 = 2, \end{aligned}$$

ed il nuovo valore di flusso nella rete è $f = 4 + 1 = 5$. Il nuovo grafo di scarto è il seguente.



Sull'ultimo grafo di scarto non esistono cammini orientati $s - d$ (facile verifica), quindi un flusso massimo è dato da

$$\begin{aligned} x_{s1} &= 3, & x_{12} &= 2, & x_{13} &= 1, & x_{26} &= 2, & x_{6d} &= 2, \\ x_{s4} &= 1, & x_{43} &= 1, & x_{3d} &= 2, & & & & \\ x_{s5} &= 1, & x_{5d} &= 1, & & & & & & \end{aligned}$$

con $f = 5$. Un taglio di capacità minima è determinato dall'insieme dei nodi raggiungibili da s sull'ultimo grafo di scarto mediante cammini orientati. Qui, $U = \{s, 1, 2, 3, 4, 5\}$ è un taglio di capacità minima (verificare che $C(S_U) = 5$).

(b) Ottimo $f = 4$, $U = \{s, 1, 2\}$.

(c) Ottimo $f = 6$, $U = \{s, 1, 2, 4, 5, 6\}$.

(d) Ottimo $f = 5$, $U = \{s\}$.

(e) Ottimo $f = 9$, $U = \{s, 2, 3\}$.

7.2. Se i vincoli di capacità $x_{ij} \leq c_{ij}$ sono specificati per tutti gli archi del grafo, la regione di ammissibilità non può essere un troncone. Se invece il grafo contiene archi a capacità illimitata, e se esiste un circuito formato da archi di tale genere, la regione di ammissibilità è un poliedro illimitato (valgono le considerazioni degli esercizi 7.5 e seguenti).

7.3. È sufficiente, dato il grafo G capacitato sui nodi, costruire un grafo G' capacitato sugli archi, definito come segue.

- Ad ogni nodo i con capacità c_i di G corrispondono in G' due nodi i_1, i_2 collegati da un singolo arco (i_1, i_2) di capacità c_i .
- Ad ogni arco (i, j) di G corrisponde l'arco (i_2, j_1) di capacità infinita.

Su G' si può applicare il tradizionale algoritmo per trovare il flusso massimo.

7.4. Definite le variabili u_i , $i \in V - \{s, d\}$ associate ai vincoli di conservazione del flusso, e le variabili w_{ij} , $(i, j) \in A$ associate ai vincoli di capacità, il duale del modello del massimo flusso è

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} w_{ij}$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
 u_i - u_j + w_{ij} &\geq 0 & (i, j) \in A, i, j \notin \{s, d\}, \\
 -u_j + w_{sj} &\geq 1 & (s, j) \in A, \\
 u_i + w_{id} &\geq 0, & (i, d) \in A, \\
 u_i &\text{ libere, } \forall i \in V - \{s, d\}, w_{ij} \geq 0, \forall (i, j) \in A.
 \end{aligned}$$

La matrice dei vincoli è TU (verificare), ed i termini noti appartengono all'insieme $\{0, 1\}$. Quindi le soluzioni di base avranno valori interi.

7.5. Per la serie di vincoli $u_i - u_j + w_{ij} \geq 0$, si può verificare che, per ogni taglio $(U, V - U)$, per i valori specificati risulta, per $i, j \neq s, d$:

	u_i	u_j	w_{ij}	$u_i - u_j + w_{ij}$
$i \in U, j \notin U$	-1	0	1	0
$i \notin U, j \in U$	0	-1	0	1
$i \in U, j \in U$	-1	-1	0	0
$i \notin U, j \notin U$	0	0	0	0

quindi questi vincoli sono soddisfatti. Analogamente si possono verificare le altre serie di vincoli:

	u_j	w_{sj}	$-u_j + w_{sj}$
$s \in U, j \notin U$	0	1	1
$s \in U, j \in U$	-1	0	1

	u_i	w_{id}	$u_i + w_{id}$
$i \in U, d \notin U$	-1	1	0
$i \notin U, d \notin U$	0	0	0

Parte III

Un esercizio di riepilogo

Un problema semplificato di produzione

Un'azienda produce farina; le domande minime (in tonnellate) da soddisfare nei prossimi tre mesi, i costi di produzione e di magazzino (in euro/ton.) sono riportati nella seguente tabella.

Domanda	Costo Prod.	Costo mag.
70	15	8
100	10	5
50	20	4

La forza lavoro disponibile è sufficiente per trattare qualunque quantitativo di farina, e di norma il magazzino può stoccare qualunque quantità prodotta, senza problemi di spazio. Le eccedenze a fine mese comportano un costo come dalla precedente tabella.

- (a) Scrivere e risolvere un modello di programmazione lineare che generi un piano di produzione per i prossimi tre mesi, minimizzando i costi (produzione+magazzino).
 (b) Determinare le massime oscillazioni dei costi di produzione e magazzino che non compromettano l'ottimalità del piano, e dire come varia il costo.
 (c) Si supponga di dover limitare per il secondo mese la produzione a 90 tonnellate; determinare se questo ha impatto sul piano ottimo, e calcolare un nuovo piano a costo minimo se necessario.

Soluzione

(a) Il problema ammette il seguente modello. Siano x_1, x_2, x_3 le quantità di farina prodotte in ciascuno dei prossimi tre mesi. Inoltre, introduciamo le variabili y_1, y_2, y_3 che rappresentano le giacenze a fine mese negli stessi periodi.

$$\min 15x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 8y_1 + 5y_2 + 4y_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned} x_1 &= 70 + y_1 \\ x_2 + y_1 &= 100 + y_2 \\ x_3 + y_2 &= 50 + y_3 \\ x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Ogni vincolo rappresenta un bilancio del tipo

$$\begin{aligned} \langle \text{produzione al mese } i \rangle + \langle \text{eccedenza del mese } i-1 \rangle = \\ \langle \text{domanda mese } i \rangle + \langle \text{eccedenza del mese } i \rangle. \end{aligned}$$

In forma standard, il modello si presenta come segue

$$- \max -15x_1 - 10x_2 - 20x_3 - 8y_1 - 5y_2 - 4y_3$$

soggetto a

$$\begin{array}{rccccrcr} x_1 & & -y_1 & & & & = 70 \\ & x_2 & +y_1 & -y_2 & & & = 100 \\ & & x_3 & +y_2 & -y_3 & & = 50 \\ x_1, \dots, y_3 & \geq & 0. \end{array}$$

Partendo dalla base iniziale $B_0 = \{x_1, x_2, x_3\}$ si ottiene

$$\begin{array}{rccccrcr} \max & z = & -3050 & -13y_1 & +5y_2 & -24y_3 & \\ & x_1 = & 70 & +y_1 & & & \\ & x_2 = & 100 & -y_1 & +y_2 & & \\ & x_3 = & 50 & & -1y_2 & +y_3 & \\ & & & & & & x_1, \dots, y_3 \geq 0. \\ \max & z = & -2800 & -13y_1 & -5x_3 & -19y_3 & \\ & x_1 = & 70 & +y_1 & & & \\ & x_2 = & 150 & -y_1 & -x_3 & +y_3 & \\ & y_2 = & 50 & & -x_3 & +y_3 & \\ & & & & & & x_1, \dots, y_3 \geq 0. \end{array}$$

Il piano di produzione ottimo è quindi il seguente,

Mese	Produzione	Giacenza
1	70	—
2	150	50
3	—	—

dove non c'è giacenza al termine del terzo mese (nota: si può facilmente dimostrare che $y_3 = 0$ in ogni soluzione ottima, quindi la y_3 poteva anche essere cancellata dal modello in base a considerazioni *a priori*). (b) Siano $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ le variazioni dei costi di magazzino, e $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ le variazioni dei costi di produzione, riferendosi al programma scritto *in forma standard*. Per la soluzione ottenuta, risulta $B_{ot} = \{x_1, x_2, y_2\}$, e quindi

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_N = (-5 \quad -13 \quad -19).$$

Svolgendo analisi di sensitività:

- per i costi relativi a variabili fuori base, si ottiene per garantire la stabilità

$$\begin{aligned} -\infty &\leq \Delta_1 \leq 13, \\ -\infty &\leq \Delta_3 \leq 19, \\ -\infty &\leq \delta_3 \leq 5; \end{aligned}$$

- per i costi relativi a variabili in base, si ottiene

$$\begin{aligned} -\infty &\leq \delta_1 \leq 13, \\ -5 &\leq \delta_2 \leq 19, \\ -5 &\leq \Delta_2 \leq 19. \end{aligned}$$

In dettaglio, per i costi relativi a variabili in base:

(i) usando il metodo basato sull'utilizzo della riformulazione, considerando le perturbazioni δ_1 , δ_2 e Δ_2 per i costi di x_1 , x_2 e y_2 rispettivamente si calcolano le perturbazioni della funzione obiettivo

$$\begin{aligned} (\delta_1) \quad \max z &= -(2800 - 70\delta_1) - (13 - \delta_1)y_1 - 5x_3 - 19y_3 \\ &\implies \delta_1 \leq 13; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\delta_2) \quad \max z &= -(2800 - 150\delta_2) - (13 + \delta_2)y_1 - (5 + \delta_2)x_3 - (19 + \delta_2)y_3 \\ &\implies \delta_2 \geq -13, \delta_2 \geq -5, \delta_2 \leq 19; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Delta_2) \quad \max z &= -(2800 - 50\Delta_2) - 13y_1 - (5 + \Delta_2)x_3 - (19 - \Delta_2)y_3 \\ &\implies \Delta_2 \geq -5, \Delta_2 \leq 19. \end{aligned}$$

(ii) Lavorando con il metodo matriciale, che fa uso esplicito della definizione di costi ridotti, le condizioni di ottimalità sotto una perturbazione Δ_B dei costi in base sono

$$c_N - (c_B + \Delta_B)A_B^{-1}A_N \leq 0 \quad \implies \quad \Delta_B A_B^{-1}A_N \geq \gamma_N,$$

dove per B occorre prendere la base ottima (qui B_1); i vettori di perturbazione sono, nei tre casi da considerare, $(\delta_1, 0, 0)$, $(0, \delta_2, 0)$, $(0, 0, \Delta_2)$, quindi

$$\begin{aligned} (\delta_1) \quad (\delta_1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} &\geq (-5 \ -13 \ -19) \\ \implies (\delta_1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} &\geq (-5 \ -13 \ -19) \\ \implies -\delta_1 &\geq -13. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\delta_2) \quad (0 \ \delta_2 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} &\geq (-5 \ -13 \ -19) \\ \delta_2 &\geq -5 \\ \implies \delta_2 &\geq -13 \\ -\delta_2 &\geq -19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Delta_2) \quad (0 \ 0 \ \Delta_2) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} &\geq (-5 \ -13 \ -19) \\ \implies \Delta_2 &\geq -5 \\ -\Delta_2 &\geq -19 \end{aligned}$$

Quindi, in termini di costi di produzione e magazzino per il problema originale si possono raccogliere le oscillazioni dei costi che non compromettono l'ottimalità nella seguente tabella.

Mese	Costo prod.		Costo mag.	
	-	+	-	+
1	13	$+\infty$	13	$+\infty$
2	19	5	19	5
3	5	$+\infty$	19	$+\infty$

(c) Operando sulla riformulazione finale, inseriamo il vincolo addizionale $x_2 \leq 90$; esso si esprime riformulandolo rispetto alla base ottima come

$$150 - y_1 - x_3 + y_3 \leq 90 \iff -y_1 - x_3 + y_3 + s = -60,$$

dove s è una nuova variabile di slack. Inserendo il nuovo vincolo nella riformulazione, si ottiene

$$\begin{array}{rcccccl} \max & z = & -2800 & -13y_1 & -5x_3 & -19y_3 & \\ & x_1 = & 70 & +y_1 & & & \\ & x_2 = & 150 & -y_1 & -x_3 & +y_3 & \\ & y_2 = & 50 & & -x_3 & +y_3 & \text{non ammissibile} \\ & s = & -60 & +y_1 & +1x_3 & -y_3 & \\ & & & & & & x_1, \dots, y_3, s \geq 0; \end{array}$$

operando con il simplesso duale si ottiene poi

$$\begin{array}{rcccccl} \max & z = & -3100 & -8y_1 & -5s & -24y_3 & \\ & x_1 = & 70 & +y_1 & & & \\ & x_2 = & 90 & & -s & & \\ & y_2 = & -10 & +y_1 & -s & & \\ & x_3 = & 60 & -y_1 & +s & +y_3 & \\ & & & & & & x_1, \dots, y_3, s \geq 0; \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccl} \max & z = & -3180 & -8y_2 & -13s & -24y_3 & \\ & x_1 = & 80 & +y_2 & +s & & \\ & x_2 = & 90 & & -s & & \\ & y_1 = & 10 & +y_2 & +s & & \\ & x_3 = & 50 & -y_2 & & +y_3 & \\ & & & & & & x_1, \dots, y_3, s \geq 0. \end{array}$$

Nell'ipotesi di dover limitare la produzione a 50 ton. nel secondo mese, il piano ottimo si modifica quindi come segue.

Mese	Produzione	Giacenza
1	80	10
2	90	—
3	50	—