

COMPITO DI RICERCA OPERATIVA

ESERCIZIO 1. (8 punti) Sia dato il seguente problema di PL:

$$\begin{aligned} \max \quad & -2x_1 + x_2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Lo si risolva graficamente individuandone soluzione ottima e valore ottimo (2 punti). Lo si trasformi in forma standard e si risolva il problema trasformato con l'algoritmo che si ritiene più opportuno (2 punti). Si stabilisca tramite l'analisi di sensitività l'intervallo entro il quale si può far variare la modifica Δc_2 del coefficiente di x_2 nell'obiettivo senza che la base ottima cambi (2 punti). Si interpreti il risultato per via grafica, ovvero si stabilisca a cosa corrispondono i due estremi dell'intervallo individuato al punto precedente (2 punti).

ESERCIZIO 2. (5 punti) Si consideri il seguente problema di PLI:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_2 \\ & 2x_1 - x_3 = 1 \\ & 2x_1 - 2x_2 + x_4 = 1 \\ & 2x_1 + 2x_2 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in I \end{aligned}$$

Il rilassamento lineare ha la seguente riformulazione rispetto alla base ottima $B^* = \{x_1, x_2, x_4\}$:

$$\begin{aligned} \max \quad & 1 - \frac{1}{2}x_3 \\ & x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_3 \\ & x_2 = 1 - \frac{1}{2}x_3 \\ & x_4 = 2 - 2x_3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

A partire da queste informazioni, si risolva il problema di PLI utilizzando l'algoritmo branch-and-bound.

ESERCIZIO 3. (6 punti) Si consideri il seguente problema di PLI:

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 - 2x_2 \\ & 4x_2 - x_3 = 1 \\ & 3x_1 + 4x_2 - x_4 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in I \end{aligned}$$

Se ne risolva il rilassamento lineare con il simplesso duale (3 punti) e si esegua una singola iterazione dell'algoritmo di taglio di Gomory (3 punti).

ESERCIZIO 4. (6 punti) La realizzazione di due prodotti $P1$ e $P2$ richiede un certo uso di tre diverse risorse $R1, R2$ e $R3$ per ogni unità di prodotto realizzata, come indicato nella tabella

seguinte

	$R1$	$R2$	$R3$
$P1$	5	2	3
$P2$	2	5	6

Ogni unità di prodotto $P1$ ha profitto pari a 7, mentre ogni unità di prodotto $P2$ ha profitto pari a 9. Si ha una disponibilità limitata delle tre risorse $R1$, $R2$ e $R3$ rispettivamente pari a 50, 60 e 70. Si può anche decidere, per ognuna delle tre risorse se acquistare o meno altre 20 unità della stessa ad un costo aggiuntivo per le 20 unità pari a 10, 12 e 14 rispettivamente per le tre risorse $R1$, $R2$ e $R3$. Si vuole massimizzare il profitto complessivo (guadagni - costi). Si costruisca il modello matematico di tale problema.

ESERCIZIO 5. (5 punti) Per ciascuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa **motivando la risposta**:

- (1) in un problema di PL in cui vi sia un insieme infinito e limitato di soluzioni ottime, queste si trovano sempre tutte su un segmento appartenente alla regione ammissibile;
- (2) in un problema del trasporto non si può verificare il caso di obiettivo illimitato sulla regione ammissibile;
- (3) dato un problema di PL e la relativa base ottima B^* , modificando un termine noto del problema posso far perdere sia l'ammissibilità primale che quella duale di B^* ;
- (4) dato un problema di PLI e il suo rilassamento lineare, l'introduzione di un taglio valido riduce sicuramente il valore ottimo del rilassamento lineare;
- (5) se nella soluzione ottima di un problema di PL in forma standard una variabile ha valore strettamente positivo, allora il corrispondente vincolo nel duale è soddisfatto come disuguaglianza stretta dalla soluzione ottima del duale.

ESERCIZIO 6. (3 punti) Sia dato un problema di PLI con sole variabili *binarie*. Si supponga che il valore ottimo del suo rilassamento lineare sia pari a 100 e si supponga che il valore attuale del lower bound LB del problema sia 90. Spiegare perché se il coefficiente di costo ridotto di una variabile fuori base è pari a -15, allora tale variabile avrà sicuramente valore pari a 0 nella soluzione ottima del problema di PLI.

SOLUZIONI

1. La regione ammissibile del problema è riportata in Figura 1. La direzione di crescita della funzione obiettivo è identificata dal vettore $(-2, 1)$, perpendicolare alle rette isoprofitto, e l'ottimo si trova nel punto di estremo $(x_1^* = 0, x_2^* = 2)$.

La forma standard del problema è la seguente

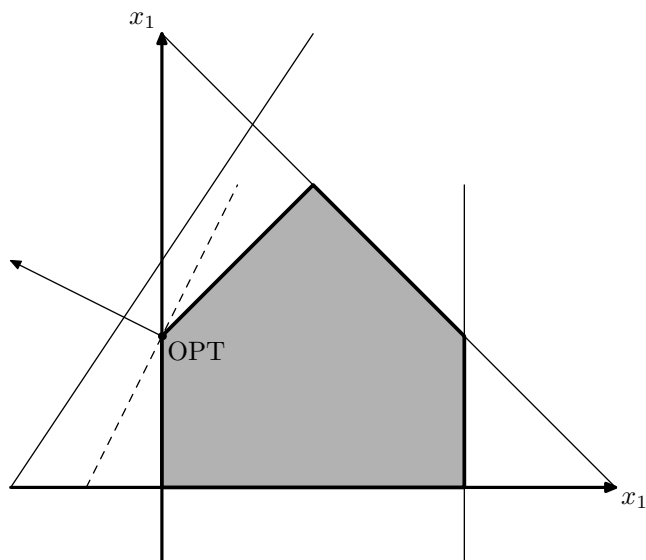


FIGURE 1. Regione di ammissibilità.

$$\begin{aligned}
 \max \quad & -2x_1 + x_2 \\
 -x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\
 x_1 + x_2 + x_4 &= 6 \\
 x_1 + x_5 &= 4 \\
 x_1, x_2, \dots, x_5 &\geq 0
 \end{aligned}$$

da cui, partendo dalla base iniziale $B_0 = \{x_3, x_4, x_5\}$ si ottiene quanto segue.

$$\begin{aligned}
 \max \quad & z = 0 \quad -2x_1 \quad +x_2 \\
 x_3 &= 2 \quad +x_1 \quad -1x_2 \\
 x_4 &= 6 \quad -x_1 \quad -x_2 \\
 x_5 &= 4 \quad -x_1 \\
 x_1, \dots, x_5 &\geq 0
 \end{aligned}
 \quad B_0 = \{x_3, x_4, x_5\}$$

$$\begin{aligned}
 \max \quad & z = 2 \quad -x_1 \quad -x_3 \\
 x_2 &= 2 \quad +x_1 \quad -x_3 \\
 x_4 &= 4 \quad -2x_1 \quad +x_3 \\
 x_5 &= 4 \quad -x_1 \\
 x_1, \dots, x_5 &\geq 0
 \end{aligned}
 \quad B_1 = B_0 \cup \{x_2\} \setminus \{x_3\}.$$

Scrivendo la funzione obiettivo riformulata rispetto alla perturbazione $c_2 + \Delta c_2$ si ottiene

$$z + \Delta z = (2 + 2\Delta c_2) + (-1 + \Delta c_2)x_1 + (-1 - \Delta c_2)x_3$$

e, imponendo le condizioni di ottimalità,

$$\begin{aligned}
 -1 + \Delta c_2 &\leq 0 \\
 -1 - \Delta c_2 &\leq 0
 \end{aligned}
 \implies -1 \leq \Delta c_2 \leq 1.$$

Le due condizioni corrispondono alle due funzioni obiettivo perturbate $z = -2x_1$ (rette isoprofitto parallele all'asse x_2) e $z = -2x_1 + 2x_2$ (rette isoprofitto parallele alla retta $-x_1 + x_2 = 2$).

2. Dalla riformulazione ottima rilassamento lineare che fornisce $UB_0 = 1$, si può effettuare il branch sulla variabile x_1 .

$$\text{Nodo 1. } x_1 \leq 0 \iff \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_3 + y_1 = 0, y_1 \geq 0;$$

$$\text{Nodo 2. } x_1 \geq 0 \iff \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_3 - y_2 = 1, y_2 \geq 0.$$

Il nodo 1 è privo di soluzioni ammissibili, mentre per il nodo 2, si risolve il rilassamento lineare ottenendo

$$\begin{array}{ll} \max & z = 1 - \frac{1}{2}x_3 \\ & x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_3 \\ & x_2 = 1 - \frac{1}{2}x_3 \\ & x_4 = 2 - 2x_3 \\ & y_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_3 \\ & x_1, \dots, x_4 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{array} \implies \begin{array}{ll} \max & z = \frac{1}{2} - y_2 \\ & x_1 = 1 + y_2 \\ & x_2 = \frac{1}{2} - y_2 \\ & x_4 = 0 - 4y_2 \\ & x_3 = 1 + 2y_2 \\ & x_1, \dots, x_4, y_2 \geq 0. \end{array}$$

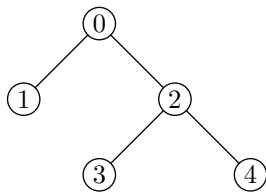
Dalla riformulazione ottima del nodo 2 si può effettuare una ulteriore operazione di branch.

$$\text{Nodo 3. } x_2 \leq 0 \iff \frac{1}{2} - y_2 + y_3 = 0, y_3 \geq 0;$$

$$\text{Nodo 4. } x_2 \geq 0 \iff \frac{1}{2} - y_2 - y_4 = 1, y_4 \geq 0.$$

Il nodo 4 risulta immediatamente privo di soluzioni ammissibili, mentre per il nodo 3 si ottiene

$$\begin{array}{ll} \max & z = \frac{1}{2} - y_2 \\ & x_1 = 1 + y_2 \\ & x_2 = \frac{1}{2} - y_2 \\ & x_4 = 0 - 4y_2 \\ & x_3 = 1 + 2y_2 \\ & y_2 = -\frac{1}{2} + y_3 \\ & x_1, \dots, x_4, y_2, y_3 \geq 0 \end{array} \implies \begin{array}{ll} \max & z = 0 - y_3 \\ & x_1 = \frac{3}{2} + y_3 \\ & x_2 = 0 - y_3 \\ & x_4 = -2 - 4y_3 \\ & x_3 = 2 + 2y_3 \\ & y_2 = \frac{1}{2} + y_3 \\ & x_1, \dots, x_4, y_2, y_3 \geq 0. \end{array}$$



Anche il nodo 3 risulta quindi privo di soluzioni ammissibili. Il problema originale è dunque privo di soluzioni ammissibili intere.

3. Il problema è già espresso in forma standard. Riformulando rispetto alla base $B_0 = \{x_3, x_4\}$ si può procedere con il simplesso duale.

$$\begin{array}{ll} \max & z = -x_1 - 2x_2 \\ & x_3 = -1 + 4x_2 \\ & x_4 = -6 + 3x_1 + 4x_2 \\ & x_1, \dots, x_4 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \max & z = -2 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 \\ & x_3 = -1 + 4x_2 \\ & x_1 = 2 - \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4 \\ & x_1, \dots, x_4 \geq 0. \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\max \quad z &= -\frac{13}{6} - \frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \\
x_2 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x_3 \\
x_1 &= \frac{5}{3} - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \\
x_1, \dots, x_4 &\geq 0.
\end{aligned}$$

La riga di x_2 presenta termine noto non intero e porta a generare il taglio di Gomory

$$y_1 = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4}x_4, \quad y_1 \geq 0.$$

Aggiungendo tale taglio e risolvendo si arriva alla seguente soluzione del nuovo rilassamento lineare (ancora non intera)

$$\begin{aligned}
\max \quad z &= -\frac{20}{9} - \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}x_4 \\
x_2 &= \frac{1}{3} + y_1 \\
x_1 &= \frac{14}{9} - \frac{4}{3}y_1 + \frac{1}{3}x_4 \\
x_3 &= \frac{1}{3} + 4y_1 \\
x_1, \dots, x_4, y_1 &\geq 0
\end{aligned}$$

4. Si definiscano due variabili intere (se si suppone che P1, P2 siano realizzati in unità discrete) x_1, x_2 che rappresentano le unità di P1 e P2 prodotte. Si introducano inoltre tre variabili binarie y_1, y_2, y_3 che valgono 1 se e solo se si acquistano le 20 unità supplementari di R1, R2, R3 rispettivamente. Un modello del problema è il seguente.

$$\max 7x_1 + 9x_2 - 10y_1 - 12y_2 - 14y_3$$

soggetto a

$$\begin{aligned}
5x_1 + 2x_2 &\leq 50 + 20y_1 \\
2x_1 + 5x_2 &\leq 60 + 20y_2 \\
3x_1 + 6x_2 &\leq 70 + 20y_3 \\
x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}_+, y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}.
\end{aligned}$$

5. Risposte.

- (1) Falso. Se la funzione obiettivo è costante, l'intera S_a contiene tutte soluzioni ottime.
 - (2) Vero, ogni variabile x_{ij} è limitata superiormente, ad esempio da $x_{ij} \leq \min\{a_i, b_j\}$.
 - (3) Falso, l'ammissibilità duale non dipende dai termini noti.
 - (4) Falso, è garantito solo che tale valore non aumenta.
 - (5) Falso. Necessariamente, se una variabile primale è strettamente positiva all'ottimo, il vincolo duale è soddisfatto per uguaglianza.
6. Se una variabile ha costo ridotto -15 all'ottimo del rilassamento lineare, ogni soluzione con tale variabile a 1 ha profitto non superiore a $100 - 15 = 85 \leq \text{LB} = 90$.