COMPITO DI RICERCA OPERATIVA

ESERCIZIO 1. (9 punti) Sia dato il seguente problema di PL:

$$
\begin{array}{ll}
\max & x_1 + 2x_2 + x_3 \\
& x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\
& -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 2 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

Si determini il duale del problema (1 punto). Si risolva il duale per via grafica (2 punti). Si calcoli la soluzione ottima del primale *utilizzando le condizioni di complementarità* (2 punti). Si scriva la riformulazione del primale rispetto alla sua base ottima (2 punti). Stabilire in quale intervallo posso far variare la modifica Δc_1 del coefficiente di x_1 nell'obiettivo senza che cambi la base ottima (2 punti).

ESERCIZIO 2. (8 punti) Si consideri il seguente problema di PLI:

$$
\begin{array}{ll}
\max & x_2 \\
& -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\
& 2x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \in I
\end{array}
$$

Lo si risolva utilizzando l'algoritmo branch-and-bound restituendo una soluzione ottima e il valore ottimo del problema.

ESERCIZIO 3. (7 punti) Sia dato il problema del trasporto con 3 depositi e 3 negozi in cui:

$$a_1 = 20 \quad a_2 = 30 \quad a_3 = 50$$

$$b_1 = 10 \quad b_2 = 30 \quad b_3 = 20$$

e i seguenti costi unitari di trasporto tra depositi e negozi:

	$N1$	$N2$	$N3$
$D1$	9	9	11
$D2$	12	11	1
$D3$	2	3	1

Determinare una base ammissibile iniziale utilizzando la regola dell'angolo nord-ovest (1 punto). Eseguire due iterazioni dell'algoritmo del simplesso (3 punti). Trovare una base ammissibile iniziale utilizzando la regola dell'angolo nord-est, che funziona come la nord-ovest ma parte dall'angolo nord-est (in alto a destra) della tabella e risolvere il problema a partire da questa (2 punti). Sulla base dei risultati ottenuti, potete affermare che la scelta della regola per generare una base iniziale ha un impatto sull'efficienza con cui siamo in grado di risolvere il problema? (1 punto)

ESERCIZIO 4. (6 punti) Rispondere a ciascuna delle seguenti domande **motivando la risposta**:

(1) Dato un triangolo e una funzione lineare di due variabili, è possibile che la funzione lineare raggiunga il suo valore massimo solo in un punto all'interno del triangolo? (1.5 punti)

(2) È vero che dato un problema di PLI, il valore ottimo del suo rilassamento lineare non differisce mai per più di 1 rispetto al valore ottimo del problema di PLI? (1 punto)

(3) Dato un problema di PL, nella soluzione ottima del suo duale la variabile duale associata a un vincolo ha valore nullo. Se in tale vincolo cambio il termine noto senza che cambi la base ottima, come cambia il valore ottimo del problema? (1.5 punti)

(4) Dato un problema primale di PL in forma standard e il suo duale, conosciamo tre soluzioni ammissibili del primale con valore dell'obiettivo primale rispettivamente pari a 2, 8 e 6, e due soluzioni ammissibili del duale con valore dell'obiettivo duale rispettivamente pari a 9 e 7. È plausibile una situazione del genere? (1 punto)

(5) È vero che l'aggiunta di tagli validi in un problema di PLI, non modifica la regione ammissibile del problema? (1 punto)

ESERCIZIO 5. (3 punti) Sia dato un problema di PL in forma canonica (obiettivo da massimizzare, vincoli di $\leq$, variabili non negative) con in più la carattersitica che tutte le variabili hanno coefficienti non negativi sia nell'obiettivo che nei vincoli. Si dimostri che, nel caso in cui una variabile x_i non compaia nell'obiettivo ed esiste una soluzione ottima, allora esiste sicuramente almeno una soluzione ottima del problema in cui x_i ha valore nullo.

Soluzioni

1. Il duale del problema è

$$\min\ u_1 + 2u_2$$

soggetto a

$$\begin{aligned} & u_1 - 2u_2 \geq 1 \\ & -u_1 + 3u_2 \geq 2 \\ & u_1 \geq 1 \\ & u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Dall'esame della regione ammissibile D_a risulta che l'ottimo duale si trova in corrispondenza del vertice $(u_1^* = 7, u_2^* = 3)$. Per mezzo delle condizioni di complementarietà si ricava, per l'ottimo primale:

$$\begin{aligned} & u_1^* > 1 \implies x_3^* = 0, \\ & u_2^* > 0 \implies x_4^* = 0. \end{aligned}$$

Quindi l'ottimo primale soddisfa le condizioni

$$\begin{aligned} & x_1^* - x_2^* + x_3^* = 1 \\ & -2x_1^* + 3x_2^* + x_4^* = 2 \\ & x_3^* = x_4^* = 0 \end{aligned}$$

da cui risulta

$$x_1^* = 5, x_2^* = 4, x_3^* = x_4^* = 0.$$

La base ottima primale deve quindi essere la base $\{x_1, x_2\}$, corrispondente alla riformulazione

$$\begin{array}{lrrrr} \max & z = & 13 & -6x_3 & -3x_4 \\ & x_1 = & 5 & -3x_3 & -x_4 \\ & x_2 = & 4 & -2x_3 & -x_4 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, \ldots, x_4 \geq 0.} \end{array}$$

La modifica del costo di x_1 che non compromette l'ottimalità della base $\{x_1, x_2\}$ deve soddisfare le condizioni

$$\begin{array}{r} -6 - 3\Delta c_1 \leq 0 \\ -3 - \Delta c_1 \leq 0 \end{array} \implies \Delta c_1 \geq -2$$

2. Il rilassamento lineare del problema ha la seguente riformulazione ottima.

$$\begin{array}{lrlr} \max & z = & 2 - \frac{1}{3}x_3 & -\frac{1}{3}x_4 \\ & x_1 = & \frac{1}{2} + \frac{1}{6}x_3 & -\frac{1}{3}x_4 \\ & x_2 = & 2 - \frac{1}{3}x_3 & -\frac{1}{3}x_4 \\ & & \multicolumn{2}{l}{x_1, \ldots, x_4 \geq 0} \end{array}$$

Effettuando il branch su x_1 si ottengono i nodi

$$\begin{aligned} &(1)\ \ x_1 \leq 0 \iff \frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{3}x_4 + y_1 = -\frac{1}{2},\ y_1 \geq 0; \\ &(2)\ \ x_1 \geq 1 \iff \frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{3}x_4 - y_2 = \frac{1}{2},\ y_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Al nodo 1 si ottiene

$$\begin{array}{lrrrr} \max & z = & 2 & -\frac{1}{3}x_3 & -\frac{1}{3}x_4 \\ & x_1 = & \frac{1}{2} & +\frac{1}{6}x_3 & -\frac{1}{3}x_4 \\ & x_2 = & 2 & -\frac{1}{3}x_3 & -\frac{1}{3}x_4 \\ & y_1 = & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6}x_3 & +\frac{1}{3}x_4 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, \ldots, x_4, y_1 \geq 0} \end{array} \implies \begin{array}{lrrrr} \max & z = & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}x_3 & -y_1 \\ & x_1 = & 0 & & -y_1 \\ & x_2 = & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}x_3 & -y_1 \\ & x_4 = & \frac{3}{2} & +\frac{1}{2}x_3 & +3y_1 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, \ldots, x_4, y_1 \geq 0.} \end{array}$$

Al nodo 2 si ottiene

$$
\begin{array}{rrrrr}
\max & z = & 2 & -\frac{1}{3}x_3 & -\frac{1}{3}x_4 \\
 & x_1 = & \frac{1}{2} & +\frac{1}{6}x_3 & -\frac{1}{3}x_4 \\
 & x_2 = & 2 & -\frac{1}{3}x_3 & -\frac{1}{3}x_4 \\
 & y_2 = & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{6}x_3 & -\frac{1}{3}x_4 \\
 & & \multicolumn{3}{c}{x_1, \dots, x_4, y_2 \geq 0}
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{rrrrr}
\max & z = & 1 & -x_4 & -2y_2 \\
 & x_1 = & 1 & & +y_2 \\
 & x_2 = & 1 & -x_4 & -2y_2 \\
 & x_3 = & 3 & +2x_4 & +6y_2 \\
 & & \multicolumn{3}{c}{x_1, \dots, x_4, y_2 \geq 0}
\end{array}
$$

La soluzione intera $(x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 3, x_4 = 0)$ corrispondente al nodo 2 fornisce un LB. Poiché la funzione obiettivo $z = x_2$ può assumere solo valori interi, si può porre $\mathrm{UB}_1 = \lfloor 3/2 \rfloor = 1$ e chiudere già qui il nodo 1 terminando la ricerca. È ugualmente corretto effettuare il branch del nodo 1 e chiuderne i nodi discendenti.

3. Il problema va bilanciato inserendo un negozio $N4$ con $b_4 = 40$. Partendo dalla base identificata dal metodo dell'angolo NW si ottiene quanto segue.

	1	2	3	4	a_i
1	10	10			20
2		20	10		30
3			10	40	50
b_i	10	30	20	40	

	1	2	3	4
1	**0**	**0**	12	2
2	1	**0**	**0**	0
3	-9	-8	**0**	**0**

	1	2	3	4	a_i
1		20			20
2		10	20		30
3	10		0	40	50
b_i	10	30	20	40	

	1	2	3	4
1	9	**0**	12	2
2	10	**0**	**0**	0
3	**0**	-8	**0**	**0**

	1	2	3	4	a_i
1		20			20
2		10	20		30
3	10	0		40	50
b_i	10	30	20	40	

	1	2	3	4
1	1	**0**	12	-6
2	2	**0**	**0**	-8
3	**0**	**0**	8	**0**

Generando la base con il metodo dell'angolo di NE si ottiene

	1	2	3	4	
1				20	20
2			10	20	30
3	10	30	10		50

	1	2	3	4
1	7	6	10	**0**
2	10	8	**0**	**0**
3	**0**	**0**	**0**	0

Una buona soluzione iniziale aiuta quindi il processo di ottimizzazione.

4. Risposte.

(1) No, per il teorema fondamentale della programmazione lineare deve esistere almeno un vertice ottimo.

(2) No, si possono facilmente generare controesempi.

(3) Se i l'indice del vincolo perturbato e Δb_i la variazione del termine noto, il valore ottimo varia della quantità

$$u_i^* \Delta b_i,$$

dove u_i^* è il valore della variabile duale associata al vincolo i nella soluzione ottima del duale. Quindi, il valore ottimo non cambia.

(4) No. L'obiettivo primale $z = 8$ e l'obiettivo duale $w = 7$ contraddicono i risultati fondamentali sulla dualità (dualità debole).

(5) Vero, per definizione di taglio.

5. Sia $\max\{z = \mathbf{c}\mathbf{x} \colon \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ il problema dato, e sia $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ una soluzione ottima. Se $x_i^* = 0$, la proprietà vale; se invece $x_i^* > 0$, per la soluzione $\mathbf{x}'$ definita da

$$\begin{aligned} x'_j &= x^*_j \qquad (j \neq i) \\ x'_i &= 0 \end{aligned}$$

risulta $\mathbf{c}\mathbf{x}' = \mathbf{c}\mathbf{x}^*$, e inoltre

$$\mathbf{A}\mathbf{x}' \leq \mathbf{A}\mathbf{x}^* \leq \mathbf{b}.$$

La $\mathbf{x}'$ è quindi ammissibile e ottima, e prova la proprietà.