COMPITO DI RICERCA OPERATIVA

ESERCIZIO 1. (6 punti) Sia dato il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ & 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 10 \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Si stabilisca se esso ammette o meno soluzioni ammissibili tramite il metodo due fasi e se ne ammette, se ne determini una soluzione ottima e il valore ottimo.

ESERCIZIO 2. (6 punti) Sia dato il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{ll} \max & 4x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ & 2x_1 - x_2 \geq 4 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Lo si risolva graficamente individuandone soluzione ottima e valore ottimo (2 punti). Lo si trasformi in forma standard (1 punto) e si scriva il duale del problema trasformato (1 punto). Utilizzando la soluzione ottima trovata per via grafica si ottenga quella del problema in forma standard e da questa quella del suo duale tramite le condizioni di complementarità (2 punti)

ESERCIZIO 3. (6 punti) Sia dato il problema del trasporto con 2 depositi e 3 negozi in cui:

$$a_1 = 50 \quad a_2 = 20 \quad b_1 = 20 \quad b_2 = 40 \quad b_3 = 20$$

e i seguenti costi unitari di trasporto lungo gli archi:

	$N1$	$N2$	$N3$
$D1$	8	7	2
$D2$	10	9	10

Lo si risolva restituendone il valore ottimo e *almeno* due soluzioni ottime.

ESERCIZIO 4. (7 punti) Si consideri il seguente problema di PLI:

$$\begin{array}{ll} \max & -x_1 + 2x_2 - 2x_4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1 - 2x_2 + x_4 = -1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in I \end{array}$$

Dopo averne risolto il rilassamento lineare con l'algoritmo che si ritiene più opportuno (3 punti), lo si risolva utilizzando l'algoritmo branch-and-bound restituendone una soluzione ottima e il valore ottimo (4 punti).

ESERCIZIO 5. (5 punti) Per ciascuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa **motivando la risposta**:

(1) se un problema di PLI ha soluzione ottima, allora ha sempre soluzione ottima anche il suo rilassamento lineare;
(2) sia S_a la regione ammissibile di un problema di PL. Dati due punti appartenenti a tale regione ammissibile, ogni punto sul segmento che li congiunge appartiene anch'esso a S_a;

(3) dato un problema di PL e la relativa base ottima B^*, modificando un coefficiente nei vincoli di una variabile al di fuori di B^*, posso far perdere l'ammissibilità primale ma non quella duale di B^*;
(4) se un problema di PL non ha soluzioni ottime, allora la sua regione ammissibile ha almeno un raggio estremo;
(5) se la soluzione ottima del duale di un problema di PL in forma standard soddisfa un vincolo come diseguaglianza stretta, allora la variabile del primale corrispondente a tale vincolo ha valore nullo nella soluzione ottima del primale.

ESERCIZIO 6. (3 punti) Sia dato un problema di PL che ammette soluzione ottima. Si supponga di aggiungere a tale problema una variabile. Si dica quali delle seguenti tre affermazioni sono vere *motivando la risposta*:

(1) il duale del problema modificato ammette sicuramente soluzione ottima;
(2) il duale del problema può avere regione ammissibile vuota;
(3) il duale del problema modificato può avere obiettivo illimitato.

Soluzioni

1. Impostando il problema di prima fase si ottiene

$$\max\ -s_1 - s_2$$

soggetto a

$$2x_1 + 6x_2 + 4x_2 + s_1 = 10$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + s_2 = 5$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0.$$

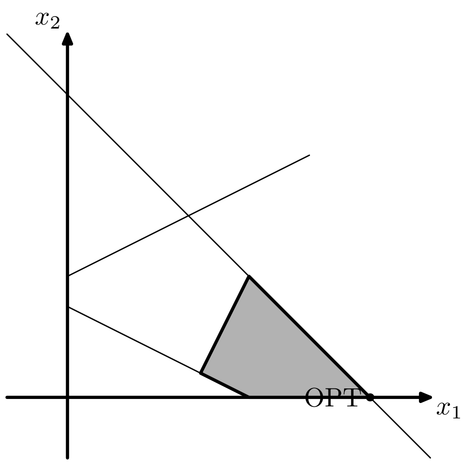
da cui, applicando il simplesso con base di partenza $B_0 = \{s_1, s_2\}$:

$$\begin{array}{rrrrrr} \max & z = & -15 & +3x_1 & +9x_2 & +6x_3 \\ & s_1 = & 10 & -2x_1 & -\mathbf{6}x_2 & -4x_3 \\ & s_2 = & 5 & -x_1 & -3x_2 & -2x_3 \\ & \multicolumn{5}{c}{x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0} \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rrrrrr} \max & z = & 0 & & -\frac{3}{2}s_1 & \\ & x_2 = & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3}x_1 & -\frac{1}{6}s_1 & -\frac{2}{3}x_3 \\ & s_2 = & 0 & & +\frac{1}{2}s_1 & \\ & \multicolumn{5}{c}{x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0} \end{array}$$

Quindi $S_a \neq \emptyset$. Inoltre, la riformulazione del secondo vincolo indica che questo è proporzionale al primo (è evidente anche per ispezione del problema); quindi questo vincolo è superfluo. Passando alla funzione obiettivo iniziale, si ottiene

$$\begin{array}{rrrrr} \max & z = & \frac{5}{3} & +\frac{2}{3}x_1 & -\frac{2}{3}x_3 \\ & x_2 = & \frac{5}{3} & -\boldsymbol{\frac{1}{3}}x_1 & -\frac{2}{3}x_3 \\ & \multicolumn{4}{c}{x_1, x_2, x_3 \geq 0} \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rrrrrl} \max & z = & 5 & -2x_2 & -2x_3 & \\ & x_1 = & 5 & -3x_2 & -2x_3 & \text{ottimo.} \\ & \multicolumn{4}{c}{x_1, x_2, x_3 \geq 0.} & \end{array}$$

2. Dall'analisi della regione ammissibile risulta che l'ottimo si trova nel punto $(x_1^* = 5, x_2^* = 0)$ con valore ottimo pari a 20.



Il problema, posto in forma standard, è

$$\max\ 4x_1 + 3x_3$$

soggetto a

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$$
$$2x_1 - x_2 - x_4 = 4$$
$$x_1 + x_2 + x_5 = 5$$
$$x_1, \ldots, x_5 \geq 0.$$

con duale

$$\min\ 3u_1 + 4u_2 + 5u_3$$

soggetto a

$$
\begin{aligned}
&u_1 + 2u_2 + u_3 \geq 4\\
&2u_1 - u_2 + u_3 \geq 3\\
&-u_1 \geq 0\\
&-u_2 \geq 0\\
&u_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Per quanto trovato in precedenza, sappiamo già che $x_1^* = 5$ e $x_2^* = 0$. Quindi, sostituendo nei vincoli di uguaglianza risulta

$$
\begin{array}{rcl}
5 - x_3^* = 3 & & x_3^* = 2 \\
10 - x_4^* = 4 & \Longrightarrow & x_4^* = 6 \quad x_1^* = 5,\ x_2^* = 0. \\
5 + x_5^* = 5 & & x_5^* = 0
\end{array}
$$

Per la soluzione ottima duale, le condizioni di complementarietà danno

$$
\begin{aligned}
x_1^* > 0 &\Longrightarrow u_1^* + 2u_2^* + u_3^* = 4\\
x_3^* > 0 &\Longrightarrow -u_1^* = 0\\
x_4^* > 0 &\Longrightarrow -u_2^* = 0
\end{aligned}
$$

e quindi $u_1^* = u_2^* = 0$, $u_3^* = 4$.

3. Bilanciando il problema, si ottiene un problema 3×3 con costi e marginali come in tabella.

	$N1$	$N2$	$N3$	a_i
$D1$	8	7	2	50
$D2$	10	9	10	20
$D3$	0	0	0	10
b_i	20	40	20	

Applicando il metodo dell'angolo NW e risolvendo si ha

	$N1$	$N2$	$N3$	a_i
$D1$	20	30^-	$+$	50
$D2$		10^+	10^-	20
$D3$			10	10
b_i	20	40	20	

x_{ij}

	$N1$	$N2$	$N3$
$D1$	**0**	**0**	-6
$D2$	0	**0**	**0**
$D3$	0	1	**0**

$\bar{c}_{ij}$

	$N1$	$N2$	$N3$	a_i
$D1$	20^-	20	10^+	50
$D2$		20		20
$D3$	$+$		10^-	10
b_i	20	40	20	

x_{ij}

	$N1$	$N2$	$N3$
$D1$	**0**	**0**	**0**
$D2$	0	**0**	6
$D3$	-6	-5	**0**

$\bar{c}_{ij}$

	$N1$	$N2$	$N3$	a_i
$D1$	10	20	20	50
$D2$		20		20
$D3$	10			10
b_i	20	40	20	

x_{ij}

	$N1$	$N2$	$N3$
$D1$	**0**	**0**	**0**
$D2$	0	**0**	6
$D3$	**0**	1	6

$\bar{c}_{ij}$

La soluzione così determinata è ottima con valore ottimo pari a 440. Il costo ridotto $\bar{c}_{21} = 0$ permette di generare — con un'operazione di pivot — anche la base ottima alternativa

	$N1$	$N2$	$N3$	a_i
$D1$		30	20	50
$D2$	10	10		20
$D3$	10			10
b_i	20	40	20	

x_{ij}

4. Risolvendo il rilassamento lineare (con il metodo due fasi e l'aggiunta di una sola variabile s) si perviene alla riformulazione

$$\begin{array}{rrrrr} \max & z = & 1 & & -x_4 \\ & x_3 = & 2 & -2x_1 & -x_4 \\ & x_2 = & \frac{1}{2} & +\frac{1}{2}x_1 & +\frac{1}{2}x_4 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, \dots, x_4 \geq 0.} \end{array}$$

Si ottengono per branch due nodi figli

Nodo 1: $x_2 \leq 0 \iff \dfrac{1}{2}x_1 + \dfrac{1}{2}x_4 + y_1 = -\dfrac{1}{2}, y_1 \geq 0;$

Nodo 2: $x_2 \geq 1 \iff \dfrac{1}{2}x_1 + \dfrac{1}{2}x_4 - y_2 = \dfrac{1}{2}, y_2 \geq 0.$

Il nodo 1 risulta privo di soluzioni ammissibili, mentre al nodo 2 si ottiene

$$\begin{array}{rrrrr} \max & z = & 1 & & -x_4 \\ & x_3 = & 2 & -2x_1 & -x_4 \\ & x_2 = & \frac{1}{2} & +\frac{1}{2}x_1 & +\frac{1}{2}x_4 \\ & y_2 = & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2}x_1 & +\frac{1}{2}x_4 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, \dots, x_4, y_2 \geq 0} \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rrrrr} \max & z = & 1 & & -x_4 \\ & x_3 = & 0 & -4y_2 & +x_4 \\ & x_2 = & 1 & +y_2 & \\ & x_1 = & 1 & +2y_2 & -x_4 \\ & & \multicolumn{3}{l}{x_1, \dots, x_4, y_2 \geq 0} \end{array} \quad \text{ottimo intero.}$$

5. Risposte.

(1) Falso. In generale, il rilassamento lineare potrebbe essere illimitato.
(2) Vero, S_a è convesso.
(3) Falso. L'ammissibilità primale non viene compromessa in quanto la A_B^{-1} in questo caso non cambia. L'ammissibilità duale potrebbe invece essere compromessa.
(4) No, si può avere $S_a = \emptyset$.
(5) Vero, è implicato dalle condizioni di complementarietà.

6. Risposte.

(1) No, si potrebbe avere il caso di primale illimitato (e quindi duale privo di soluzioni ammissibili), a causa del coefficiente in funzione obiettivo della nuova variabile.
(2) Si, per quanto detto sopra.
(3) No, aggiungendo una variabile tutte le soluzioni del PL precedente (con la nuova variabile a 0) sono anche soluzioni del nuovo PL. Il caso di duale illimitato implicherebbe invece un primale privo di soluzioni ammissibili.