Compito di Ricerca Operativa II del 03/07/2003

Esercizio 1 (14 punti)

Sia dato il problema dello zaino con 5 oggetti, i seguenti valori v_i e pesi p_i per tali oggetti

$$v_1 = 37 \quad v_2 = 18 \quad v_3 = 12 \quad v_4 = 31 \quad v_5 = 27$$

$$p_1 = 18 \quad p_2 = 9 \quad p_3 = 5 \quad p_4 = 16 \quad p_5 = 15$$

e la capacità dello zaino $b = 38$.
1) Dimostrare che per ogni soluzione ammissibile che contenga l'oggetto 5 ma non gli oggetti 2 e 3 ne esiste una sicuramente migliore che contiene gli oggetti 2 e 3 ma non l'oggetto 5.
2) Risolvere tale problema con l'algoritmo Branch and Bound visto a lezione fornendo una soluzione ottima ed il relativo valore ottimo.
3) Per ciascuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o falsa (motivando la risposta):

a) esiste certamente un algoritmo polinomiale che risolve il problema dello zaino in tempo polinomiale;

b) non esiste certamente un algoritmo polinomiale che risolve il problema dello zaino in tempo polinomiale;

c) esiste un algoritmo polinomiale per determinare una soluzione 0.1-approssimata del problema dello zaino.

Esercizio 2 (14 punti)

Sia data la rete in Figura 1 con le relative capacitá sugli archi.

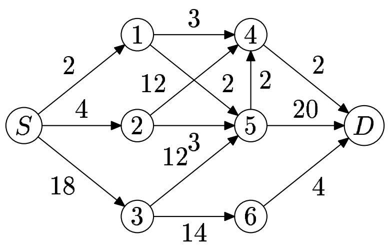


Figura 1.

1) Osservando i soli archi uscenti dal nodo S è possibile affermare che

a) il flusso massimo dal nodo sorgente S al nodo destinazione D è almeno pari a 24;

b) il flusso massimo dal nodo sorgente S al nodo destinazione D è al massimo pari a 24.

2) Determinare il flusso massimo dal nodo S al nodo D ed il taglio a costo minimo della rete.
3) Si supponga di aver risolto un generico problema di flusso su una rete $G = (V, A)$ e di aver determinato un taglio a costo minimo $U \subset V$ per tale problema. Se ora si aggiunge un arco $(i, j) \notin A$ con $i \notin U$, $j \in U$ a capacità strettamente positiva, stabilire per ognuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa (motivando le risposte):

a) il valore del flusso massimo non cambia;

b) il valore del flusso massimo puó diminuire;

c) il valore del flusso massimo puó aumentare.

Esercizio 3 (6 punti)

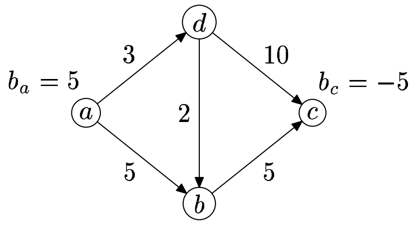
1) Siano a_1, a_2 due depositi e b_1, b_2 due negozi in un problema di trasporto. È possibile che esista una soluzione di base ottima in corrispondenza della quale entrambi i depositi a_1, a_2 inviano quantità strettamente positive di prodotto verso entrambi i negozi b_1, b_2? Ed è possibile che esista una soluzione ottima non necessariamente di base che soddisfi la stessa condizione?

2) Sia dato il problema di flusso a costo minimo sulla rete in Figura 2(a) con i costi unitari di trasporto specificati lungo gli archi. Si verifichi che l'albero di supporto in Figura 2(b) rappresenta una base ottima del problema e calcolare la soluzione di base corrispondente. È possibile affermare che:

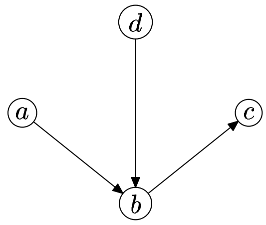
a) il problema ammette obiettivo illimitato;

b) il problema ammette un'altra soluzione di base ottima;

c) la soluzione di base ottima trovata è degenere e quindi non possiamo dire se esistano altre soluzioni ottime.



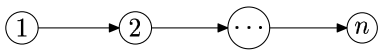
(a)



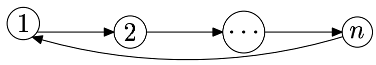
(b)

Figura 2.

3) Dato un problema di TSP metrico, si supponga che l'albero di supporto ottimo trovato al Passo 1 dell'algoritmo Double Spanning Tree (DST) sia una lista come in Figura 3(a) In tal caso si verifica facilmente che prendendo come nodo radice il nodo iniziale della lista (il nodo 1), il circuito hamiltoniano restituito da DST è quello ottenuto aggiungendo alla lista l'arco $(n, 1)$ (si veda la Figura 3(b)). Si chiede di dimostrare che la lunghezza dell'arco aggiunto $(n, 1)$ è non superiore alla metá della lunghezza del circuito ottimo (Suggerimento: spezzare il circuito ottimo in due parti opportunamente scelte e sfruttare le proprietá del problema TSP metrico) **(Opzionale)** Sulla base di tale risultato si dimostri che in questi casi il circuito restituito da DST è una soluzione 0.5-approssimata del problema TSP metrico.



(a)



(b)

Figura 3.