

Soluzioni compito di Ricerca Operativa II del 17/07/2003

Esercizio 1 (14 punti)

1) È noto che in un problema di trasporto esistono nella matrice del sistema dei vincoli $m + n - 1$ colonne linearmente indipendenti, quindi $m + n - 1$ è la dimensione di una base. Quindi l'affermazione (b) è vera: al più $m + n - 1$ variabili possono avere valori > 0 in una soluzione ammissibile di base. L'affermazione (a) è falsa in quanto non tiene conto della possibilità di incontrare una base degenerare.

2) Il problema bilanciato è

	1	2	3	4	a_i
1	15	12	14	16	30
2	18	16	15	20	40
3	22	20	30	15	50
4	0	0	0	0	20
b_j	10	20	70	40	

	1	2	3	4	a_i
1	10 ⁻	20	0 ⁺		30
2			40		40
3			30 ⁻	20 ⁺	50
4	+			20 ⁻	20
b_j	10	20	70	40	

	1	2	3	4
1	0	0	0	17
2	2	3	0	20
3	-9	-8	0	0
4	-16	-13	-15	0

	1	2	3	4	a_i
1		20	10		30
2			40		40
3			20 ⁻	30 ⁺	50
4	10		+	10 ⁻	20
b_j	10	20	70	40	

	1	2	3	4
1	16	0	0	17
2	18	3	0	20
3	7	-8	0	0
4	0	-13	-15	0

	1	2	3	4	a_i
1		20 ⁻	10 ⁺		30
2			40		40
3		+	10 ⁻	40	50
4	10		10		20
b_j	10	20	70	40	

	1	2	3	4
1	1	0	0	17
2	3	3	0	20
3	-8	-8	0	0
4	0	2	0	15

	1	2	3	4	a_i
1		10	20		30
2			40		40
3		10		40	50
4	10		10		20
b_j	10	20	70	40	

	1	2	3	4
1	1	0	0	9
2	3	3	0	12
3	0	0	8	0
4	0	2	0	7

3) (a) No, in quanto un tale problema avrà basi con dimensione $n + 2 - 1 = n + 1$; la configurazione descritta impone invece di avere in base solo n variabili. (b) Sì, è possibile. Si consideri il seguente esempio

	1	2	3	4	a_i
1	1	1	1	M	100
2	M	M	1	1	40
b_j	50	50	20	20	

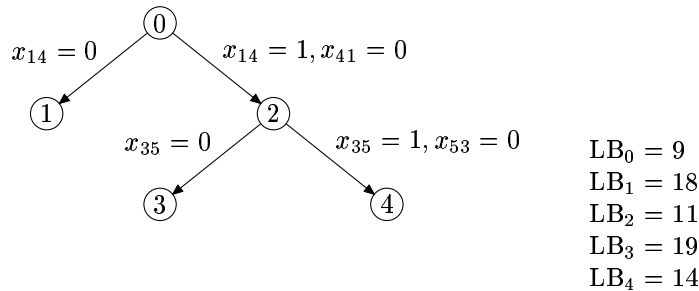
con $M > 1$, che ha per soluzione ottima di base $x_{11} = x_{12} = 50$, $x_{13} = 0$, $x_{23} = x_{24} = 20$ (base degenerare).

Esercizio 2 (14 punti)

- 1) L'algoritmo greedy fornisce il ciclo $(1, 4, 2, 3, 5, 1)$ di costo 16. Ponendo $c_{51} = M > 9$, il costo del ciclo generato è $7 + M$ (le prime quattro scelte fatte dall'algoritmo greedy non cambiano).
 2) La matrice ridotta, al nodo radice 0, risulta

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \infty & 7 & 8 & 0 & 7 \\ 1 & \infty & 0 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & \infty & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \infty & 3 \\ 6 & 0 & 0 & 2 & \infty \end{pmatrix} \end{matrix}$$

sulla quale si individua un assegnamento $\{(1, 4), (4, 1), (3, 5), (5, 2), (2, 3)\}$ di costo $LB_0 = 9$. Una soluzione di costo $z = 16$ è già nota. L'albero sviluppato è riportato nella figura seguente.



La soluzione ottima $\{(1, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 2), (2, 1)\}$ di costo 14 è trovata al nodo 4.

- 3) Si può usare la seguente matrice di distanze (caso non orientato).

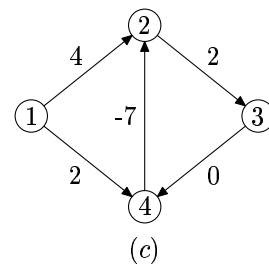
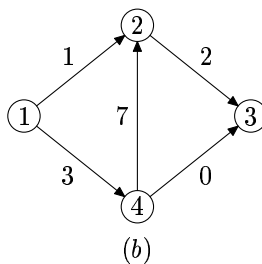
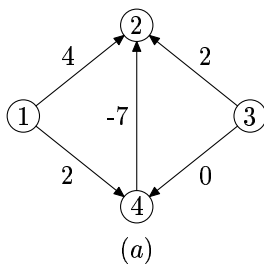
$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \infty & 2 & 1 & 2 \\ 2 & \infty & 2 & 10 \\ 1 & 2 & \infty & 2 \\ 2 & 10 & 2 & \infty \end{pmatrix} \end{matrix}$$

L'algoritmo greedy restituisce il ciclo $C = (1, 3, 2, 4, 1)$ di costo 15; all'intorno $N_2(C)$ di questa soluzione appartiene anche il ciclo $(1, 2, 3, 4, 1)$, ottimo globale.

Esercizio 3 (6 punti)

Sia $S_U = \{(k, l) : k \in U, l \in V - U\}$ il taglio in questione. 1) L'affermazione (a) è vera, infatti è noto che il valore del flusso massimo $\bar{f}$ in un grafo è pari alla capacità del taglio di costo minimo. Se $\bar{f}e\bar{f}'$ sono i valori del flusso massimo in $G(V, A)$ e $G(V, A - \{(i, j)\})$, si ha $\bar{f}' \leq C(S_U - \{(i, j)\}) = C(S_U) - c_{ij} < C(S_U) = \bar{f}$. L'affermazione (b) è falsa: in generale, il taglio a costo minimo in un grafo non è unico, quindi per aumentare il valore del massimo flusso occorre aumentare le capacità di tutti questi tagli.

- 2) Sono sufficienti i seguenti tre grafi, con $b_1 = 5, b_3 = -5, b_2 = b_4 = 0$.



3) Il modello del problema dello zaino è

$$\begin{aligned} & \max \sum_{i=1}^n v_i x_i \\ & \text{soggetto a} \\ & \sum_{i=1}^n p_i x_i \leq b \\ & x_i \in \{0, 1\}, \forall i. \end{aligned}$$

Rilassando l'unico vincolo con un moltiplicatore $\mu \geq 0$, si ottiene il problema

$$\begin{aligned} & \max L(x, \mu) = \sum_{i=1}^n (v_i - \mu p_i) x_i + \mu b \\ & x_i \in \{0, 1\}, \forall i. \end{aligned}$$

Per μ fissato, l'ottimo di questo problema si ottiene fissando

$$\begin{aligned} x_i &= 1 && \text{se } v_i - \mu p_i > 0, \\ x_i &= 0 && \text{altrimenti.} \end{aligned}$$