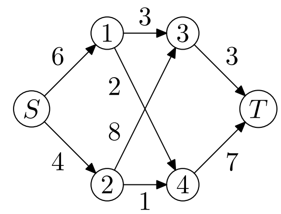
Compito di Ricerca Operativa II

Esercizio 1 (6 punti)

Sia dato il problema di flusso massimo sulla rete in figura (le capacità degli archi sono riportate sopra di essi).



Si consideri il seguente flusso ammissibile per tale rete:

$$x_{S1} = 5 \quad x_{S2} = 1 \quad x_{13} = 3 \quad x_{14} = 2 \quad x_{23} = 0 \quad x_{24} = 1 \quad x_{3D} = 3 \quad x_{4D} = 3.$$

Stabilire se tale flusso è ottimo oppure no. Nel primo caso individuare un taglio a costo minimo, nel secondo nel secondo caso determinare un flusso migliore rispetto a quello dato.

Esercizio 2 (6 punti)

Sia dato il problema del commesso viaggiatore con la seguente tabella delle distanze:

	1	2	3	4	5
1	–	8	7	–	2
2	14	–	3	9	11
3	–	11	–	3	11
4	–	4	9	–	12
5	4	10	–	8	–

Si calcoli un lower bound per il nodo radice e si effettui l'operazione di branching per il nodo radice.

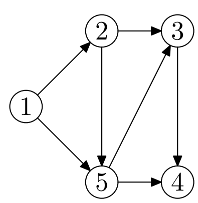
Esercizio 3 (5 punti)

Sia dato il problema di flusso a costo minimo sulla rete in figura con:

$$b_1 = 10 \quad b_2 = 0 \quad b_3 = 0 \quad b_4 = -20 \quad b_5 = 10$$

e

$$c_{12} = 5 \quad c_{15} = 20 \quad c_{23} = 8 \quad c_{25} = 6 \quad c_{34} = 7 \quad c_{53} = 15 \quad c_{54} = 5.$$

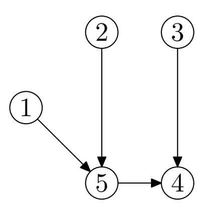


Dato il seguente albero di supporto, si verifichi che la base associata a tale albero è ammissibile. Si stabilisca se la base:

a) soddisfa la condizione di ottimalità;

b) soddisfa la condizione di illimitatezza;

c) non soddisfa nessuna delle due (in quest'ultimo caso si individui con l'operazione di cardine una nuova base con valore dell'obiettivo non peggiore)



Esercizio 4 (5 punti)

Sia dato il problema della zaino con capacità dello zaino pari a 10 e con pesi e valori dei 5 oggetti riportati di seguito:

	1	2	3	4	5
v_i	7	8	10	6	3
p_i	2	3	5	4	1

Si completi l'esecuzione dell'algoritmo di programmazione dinamica per questo problema restituendo il valore ottimo e una soluzione ottima del problema, tenuto conto che per gli oggetti 3,4 e 5 si hanno le seguenti tabelle:

s_3	f_3^*	d_3^*	s_4	f_4^*	d_4^*	s_5	f_5^*	d_5^*
0	0	N	0	0	N	0	0	N
1	3	N	1	3	N	1	3	S
2	3	N	2	3	N	2	3	S
3	3	N	3	3	N	3	3	S
4	6	N	4	4	S	4	3	S
5	10	S	5	9	S	5	3	S
6	13	S	6	9	S	6	3	S
7	13	S	7	9	S	7	3	S
8	13	S	8	9	S	8	3	S
9	16	S	9	9	S	9	3	S
10	19	S	10	9	S	10	3	S

Esercizio 5 (5 punti)

Sia dato il problema di TSP metrico con le distanze specificate nella seguente tabella:

	a	b	c	d	e
a	$-$	3	4	8	6
b		$-$	5	9	3
c			$-$	4	8
d				$-$	10
e					$-$

Utilizzare l'algoritmo Double Spanning Tree per ottenere una soluzione 1-approssimata del problema. Da tale soluzione sapreste ottenere un limite inferiore per il valore ottimo del problema?

Esercizio 6 (4 punti)

Dato un problema di flusso a costo minimo, dire (MOTIVANDO LA RISPOSTA) se è vero che:

a) Aumentando il costo di un arco fuori dalla base (albero di supporto) ottima, la base ottima non cambia.

b) Diminuendo il costo di un arco facente parte della base ottima, la base ottima non cambia.

Esercizio 7 (3 punti)

Sia dato un grafo completo con $2n+1$ nodi ed archi aventi tutti peso positivo. Si consideri il problema di matching pesato su tale grafo. Dire, MOTIVANDO LE RISPOSTE, se è vero che:

1) posso scegliere i pesi in modo che su ogni nodo del grafo incida un arco del matching ottimo;

2) posso scegliere i pesi in modo che il matching ottimo contenga un solo arco;

3) posso scegliere i pesi in modo che il matching ottimo contenga $n+1$ archi.

Soluzioni

1. Si può osservare che il taglio indotto da $U = \{S, 1, 2, 3\}$ ha capacità

$$C(S_U) = c_{35} + c_{14} + c_{24} = 6,$$

pari al flusso fornito. Quindi tale valore è ottimo (il taglio poteva anche essere trovato sistematicamente applicando la procedura di ricerca del cammino aumentante sul grafo ausiliario).

2. La riduzione per righe della matrice dei costi fornisce

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 8 & 7 & \infty & 2 \\ 14 & \infty & 3 & 9 & 11 \\ \infty & 11 & \infty & 3 & 11 \\ \infty & 4 & 9 & \infty & 11 \\ 4 & 10 & \infty & 8 & \infty \end{pmatrix}\end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 6 & 5 & \infty & \mathbf{0} \\ 11 & \infty & \mathbf{0} & 6 & 8 \\ \infty & 8 & \infty & \mathbf{0} & 8 \\ \infty & \mathbf{0} & 5 & \infty & 8 \\ \mathbf{0} & 6 & \infty & 4 & \infty \end{pmatrix}\end{array},$$

sulla quale si individua l'assegnamento

$$\{(1,5), (2,3), (3,4), (4,2), (5,1)\}$$

che non è un tour, in quanto contiene i cicli $\{(1,5), (5,1)\}$ e $\{(2,3), (3,4), (4,2)\}$. Risulta LB $= 16$. Effettuando il branch sul ciclo più piccolo si ottengono i seguenti nodi figli.
Nodo 1: arco $(1,5)$ vietato ($x_{15} = 0$).
Nodo 2: arco $(1,5)$ obbligatorio, $(5,1)$ vietato ($x_{15} = 1$, $x_{51} = 0$).

3. Impostando i vincoli di conservazione del flusso sulle sole variabili in base risulta

$$\begin{aligned} x_{15} &= 10 \\ -x_{25} - x_{15} + x_{54} &= 10 \\ x_{25} &= 0 \\ x_{34} &= 0 \\ -x_{54} &= -20 \end{aligned} \qquad \rightarrow \qquad \begin{aligned} x_{15} &= 10 \\ x_{25} &= 0 \\ x_{35} &= 0 \\ x_{54} &= 20 \\ x_{34} &= 0. \end{aligned}$$

(a) I valori calcolati per le variabili sono non negativi, quindi la base è ammissibile. I costi ridotti per la variabili fuori base x_{12}, x_{23}, x_{53} risultano

$$\bar{c}_{12} = -9, \quad \bar{c}_{23} = 4, \quad \bar{c}_{53} = 17,$$

quindi la base non è ottima.
(b) L'unico arco a costo ridotto negativo è $(1,2)$; esso induce il ciclo $\{(1,2)^+, (2,5)^+, (1,5)^-\}$ che non indica illimitatezza (più semplice ancora: non essendoci costi negativi, il simplesso non può terminare con la condizione di illimitatezza).
(c) Dal ciclo individuato al punto precedente si ottiene la base $\{(1,2), (2,5), (5,4), (3,4)\}$ con

$$x_{12} = 10, x_{25} = 10, x_{54} = 20, x_{34} = 0.$$

4. Per risolvere il problema occorre conoscere $f_1^*(10)$, cioè occorre determinare

$$\begin{aligned} f_1^*(10) &= \max\{7 + f_2^*(8), f_2^*(10)\}, \\ f_2^*(8) &= \max\{8 + f_3^*(5), f_3^*(8)\}, \\ f_2(10) &= \max\{8 + f_3^*(7), f_3^*(10)\}. \end{aligned}$$

Dalle tabelle a disposizione risulta

$$\begin{aligned} f_2^*(10) &= \max\{8 + 13, 19\} = 21 & \qquad (d_2^*(10) = S), \\ f_2^*(8) &= \max\{8 + 10, 13\} = 18 & \qquad (d_2^*(*) = S), \\ f_1^*(10) &= \max\{7 + 18, 21\} = 25 & \qquad (d_1^*(10) = S). \end{aligned}$$

Quindi $\{1, 2, 3\}$ è la soluzione ottima con valore 28.

5. Applicando uno degli algoritmi noti per determinare un MST si ottiene

$$T = \{(a,b),(b,e),(b,c),(c,d)\}, \qquad c(T) = 15.$$

Duplicando gli archi si può costruire il cammino euleriano

$$a, b, e, b, c, d, c, b, a$$

dal quale, eliminando le duplicazioni, il tour

$$a, b, e, c, d, a$$

di costo 22.
Poiché l'algoritmo Double Spanning Tree è 1-approssimato, una soluzione di 22 dà immediatamente un lower bound di $22/2 = 11$ per il problema. Nota: si può anche dedurre semplicemente da T il lower bound pari a $c(T) = 15$ (un ciclo hamiltoniano può essere visto come uno spanning tree di forma particolare *più un arco...*).

6. (a) è vera: se (i,j) è un arco fuori base, per la definizione di costi ridotti risulta, se $c'_{ij} = c_{ij} + \Delta$ e C^+, C^- sono gli insiemi di archi presi con segno $+$ e $-$ nel calcolo del costo ridotto $\bar{c}_{ij}$:

$$\bar{c}'_{ij} = c'_{ij} + \sum_{(k,l)\in C^+} c_{kl} - \sum_{(k,l)\in C^-} c_{kl} = \bar{c}_{ij} + \Delta > \bar{c}_{ij} \quad (\text{se } \Delta > 0).$$

Tutti gli altri costi ridotti rimangono invariati in quanto le relative somme algebriche non coinvolgono c_{ij}.
(b) è falsa: l'impatto della perturbazione $c'_{ij} = c_{ij} + \Delta$ sui costi ridotti se (i,j) è in base dai segni con i quali c_{ij} appare nel calcolo dei singoli costi, che quindi possono aumentare o diminuire (ed eventualmente diventare negativi).

7. (1) è falsa: se il grafo contiene $2n+1$ nodi (numero dispari) ed M è il matching ottimo un nodo necessariamente non è toccato da alcun arco di M (un grafo con un matching "perfetto" deve avere un numero pari di nodi).
(2) è falsa, se i pesi sono tutti > 0: aggiungendo archi il matching può solo migliorare il valore di funzione obiettivo (è vera se si ammettono archi di peso negativo: è sufficiente porre $w_{ij} = 1$ per l'arco (i,j) che si vuole nel matching di peso massimo M, e $w_{kl} = -1$ per ogni altro arco (k,l)).
(3) è falsa: un matching di $n+1$ archi richiede un grafo con almeno $2n+2$ nodi.