La codifica dei numeri

- La rappresentazione dei numeri con il sistema decimale può essere utilizzata come spunto per definire un metodo di codifica dei numeri all'interno degli elaboratori: la sequenza 15 viene interpretato come: 1 decina + 5 unità
- In generale la sequenza $c_n\ c_{n-1}\ c_{n-2} \dots\ c_1\ c_0$ (ogni "c_i" è una cifra compresa tra "0" e "9") viene interpretata come:

$c_0 \times 10^0 +$ (c_0 unità)

$c_1 \times 10^1 +$ (c_1 decine)

$c_2 \times 10^2 +$ (c_2 centinaia)

.....

$c_{n-1} \times 10^{n-1} +$

$c_n \times 10^n$

Un ripasso di aritmetica: la notazione posizionale

- La numerazione decimale utilizza una **notazione posizionale** basata sul numero 10 (base). La sequenza "234" rappresenta il numero $4 \times 10^0 + 3 \times 10^1 + 2 \times 10^2$
- La notazione posizionale può essere utilizzata in qualunque altro sistema di numerazione (con base diversa da 10)
- Nel sistema di numerazione binario i numeri vengono codificati utilizzando le due cifre "0" e "1"
- Nel sistema di numerazione ottale i numeri vengono codificati utilizzando le otto cifre "0", "1", …… "7"
- Nel sistema di numerazione esadecimale i numeri vengono codificati utilizzando le sedici cifre "0", "1", …… "8" , "9" , "A" , "B" , "C" , "D" , "E" , "F"
  - La cifra "A" corrisponde a 10, la cifra "B" corrisponde a 11, la cifra "C" corrisponde a 12, la cifra "D" corrisponde a 13, la cifra "E" corrisponde a 14, la cifra "F" corrisponde a 15,

Un ripasso di aritmetica: La notazione posizionale

- In analogia con il caso decimale la sequenza $c_n\ c_{n-1}\ c_{n-2} \ldots\ c_1\ c_0$ (ogni "c_i" è la cifra "0" o la cifra "1") rappresenterà, in binario, il numero

  $$c_0 \times 2^0 + c_1 \times 2^1 + \ldots c_{n-1} \times 2^{n-1} + c_n \times 2^n$$

  La sequenza "1011"denota il numero

  $$1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3 = 11 \text{ (in base 10)}$$

- In analogia con il caso decimale la sequenza $c_n\ c_{n-1}\ c_{n-2} \ldots\ c_1\ c_0$ rappresenterà, in esadecimale, il numero

  $$c_0 \times 16^0 + c_1 \times 16^1 + \ldots c_{n-1} \times 16^{n-1} + c_n \times 16^n$$

  La sequenza "1011"denota il numero

  $$1 \times 16^0 + 1 \times 16^1 + 0 \times 16^2 + 1 \times 16^3 = 4113 \text{ (in base 10)}$$

Per evitare ambiguità si usa la notazione $1011_2 = 11_{10}$

Per evitare ambiguità si usa la notazione $1011_{16} = 4113_{10}$

Un ripasso di aritmetica: Rappresentazione decimale - limitazioni

- Consideriamo la base dieci: con tre cifre decimali si possono rappresentare i numeri compresi tra 0 e 999, il numero successivo (1000) richiede una quarta cifra di cui non disponiamo

  In questo caso si dice che si ha un problema di **overflow**, ossia si eccede il numero di cifre destinato alla rappresentazione, e si genera un errore perché il numero non può essere gestito

Poiché il numero 999 può essere scritto come 10^3-1 (ossia 1000-1), possiamo enunciare la seguente regola:

con N cifre decimali si possono rappresentare

i numeri da 0 a 10^N-1

Un ripasso di aritmetica: Rappresentazione binaria - limitazioni

Consideriamo la base due: con tre cifre binarie si possono rappresentare i numeri compresi tra 0 e 2^3-1 (ossia 8-1), possiamo enunciare la seguente regola:

con N cifre binarie si possono rappresentare i numeri da

0 a 2^N-1

Esempio con N=3:

numero decimale	rappresentazione binaria
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Un ripasso di aritmetica: Rappresentazione esadecimale - limitazioni

Consideriamo la base sedici: con tre cifre esadecimali si possono rappresentare i numeri compresi tra 0 e 16^3-1 (ossia 4096-1).

con N cifre esadecimali si possono rappresentare i numeri da 0 a 16^N-1

Esempio con N=2:

numero decimale	rappresentazione esadecimale
0	00
1	01
……	……
10	0A
11	0B
……	……
15	0F
16	10
17	11
……	……
30	1E
31	1F
32	20
……	……

Un ripasso di aritmetica: Rappresentazione binaria - operazioni

- A queste rappresentazioni si possono applicare le operazioni aritmetiche:

$$0+0=0$$

$$1+0=1$$

$$0+1=1$$

$$1+1=0 \text{ con riporto di } 1 \text{ ovvero } 10$$

- 1+1 in decimale è uguale a 2 ma siamo nella notazione binaria che ha solo due cifre, 0 e 1

Un ripasso di aritmetica: Rappresentazione binaria - operazioni

- A queste rappresentazioni si possono applicare le operazioni aritmetiche:

riporti

$$
\begin{array}{rrrl}
1 & & & \\
 & 1 & 0 & + \\
 & 1 & 0 & = \\
1 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

Un ripasso di aritmetica: Rappresentazione binaria - operazioni

- A queste rappresentazioni si possono applicare le operazioni aritmetiche:

riporti

1

	1	1	+
	1	0	=
1	0	1	

Un ripasso di aritmetica: Rappresentazione binaria - operazioni

- A queste rappresentazioni si possono applicare le operazioni aritmetiche:

riporti

$$
\begin{array}{cccc}
\color{red}{1} & \color{red}{1} & & \\
 & 1 & 1 & + \\
 & 1 & 1 & = \\
1 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

Un ripasso di aritmetica: Rappresentazione binaria - operazioni

- A queste rappresentazioni si possono applicare le operazioni aritmetiche:

riporti

1	1	1		
	1	1	1	+
		1	1	=
1	0	1	0	