

**Università degli Studi di Torino**

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MM. FF. NN.  
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

$0^\#$  ed alcune sue conseguenze

Candidato:  
**Luca Vercelli**

Relatore:  
**prof. Alessandro Andretta**

---

Anno Accademico 2005–2006

## 0.1 Introduzione

Questa tesi è dedicata alla presentazione dell'insieme  $0^\#$  (*zero sharp*), la cui esistenza è indipendente dal sistema assiomatico ZFC. Interessante è quindi studiare il sistema assiomatico  $ZFC + \exists 0^\#$ , che è più forte di ZFC. Osserveremo anche che sono note teorie più forti:  $\exists 0^\#$  è un teorema dimostrabile nella teoria  $ZFC + \text{'Esiste un cardinale misurabile'}$ .

Dedicheremo parecchio spazio — tutto il **capitolo 1** — a richiamare concetti che potrebbero essere o meno noti dai corsi di logica e di analisi. Questo in primo luogo perchè ritengo importante fissare le basi su cui si fonda la teoria; ma anche perchè mi risulta esistano molte convenzioni distinte in teoria degli insiemi, ed è importante segnalare quelle da noi adottate.

Il **capitolo 2** è dedicato quindi alla presentazione dell'insieme  $0^\#$ , la cui definizione non è immediata.

Nel **capitolo 3** affronteremo lo studio di ultrafiltri normali e ultrapotenze di modelli interni, e vedremo come essi siano legati all'esistenza di  $0^\#$ .

Il **capitolo 4** presenta quella che è chiamata *teoria descrittiva degli insiemi*, ed in particolare dimostreremo un risultato noto come *teorema di absolutezza di Shoenfield*: grazie ad esso potremo scoprire che  $0^\#$  non è un insieme costruibile.

Infine, il **quinto capitolo** è dedicato allo studio dei giochi infiniti: anche in questo campo esistono proprietà dimostrabili solo grazie al nuovo assioma che abbiamo introdotto.

# Indice

0.1	Introduzione	2
<b>1</b>	<b>Preliminari</b>	<b>5</b>
1.1	Insiemi e classi	5
1.2	Il linguaggio LST	5
1.2.1	Altri linguaggi	6
1.3	Strutture	6
1.3.1	Relativizzazione di formule	8
1.3.2	Soddisfazione di formule	8
1.3.3	Collasso transitivo	9
1.3.4	Ultrapotenze	10
1.3.5	Funzioni di Skolem	11
1.3.6	La classe dei costruibili	12
1.3.7	Linguaggi e strutture di ordine superiore al primo	13
1.3.8	Complessità di formule di ordine superiore al primo	13
1.4	Proprietà dell'insieme perfetto	15
1.5	Clubs	15
1.6	Colorazioni	15
1.7	Cardinali indescrivibili	16
<b>2</b>	<b>La definizione di <math>0</math> Sharp</b>	<b>19</b>
2.1	Indiscernibilità e caratteri	19
2.2	Caratteri ben fondati	23
2.3	Caratteri cofinali	24
2.4	Caratteri notevoli	25
2.5	Zero sharp	26
2.6	Due teoremi fondamentali	30
<b>3</b>	<b><math>L \prec L</math></b>	<b>31</b>
3.1	Ultrafiltri normali	31
3.2	Ultrapotenze di modelli interni	36
3.3	Ultrapotenze e $M$ -ultrafiltri	42
3.4	Iterabilità	45
3.5	L'ultrafiltro $U^n$	47
3.6	$L \prec L$	50
3.7	Un corollario	57

<b>4</b>	<b>Teoria descrittiva degli insiemi</b>	<b>59</b>
4.1	$\Sigma_\alpha^i$ e $\Pi_\alpha^i$ . . . . .	59
4.2	$\Sigma_\alpha^i$ e $\Pi_\alpha^i$ . . . . .	61
4.2.1	Codifiche . . . . .	61
4.2.2	Aritmetica del secondo ordine . . . . .	62
4.2.3	Complessità di insiemi . . . . .	64
4.2.4	Complessità di insiemi in $\mathcal{A}^2(a)$ . . . . .	65
4.3	Relazione tra le gerarchie lightface e boldface . . . . .	65
4.4	Alberi . . . . .	67
4.5	Alcuni risultati . . . . .	70
4.6	Il teorema di absolutezza di Shoenfield . . . . .	72
4.7	Complessità di $0^\#$ . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Giochi infiniti</b>	<b>79</b>
5.1	Assiomi di determinatezza . . . . .	81
5.2	Varianti del gioco . . . . .	81
5.3	Alcuni risultati . . . . .	82
5.4	$\text{Det}(\Pi_1^1)$ . . . . .	85
<b>6</b>	<b>Sviluppi e generalizzazioni</b>	<b>87</b>
<b>A</b>	<b>Tabella dei simboli</b>	<b>89</b>
	<b>Bibliografia e riferimenti</b>	<b>91</b>

# Capitolo 1

## Preliminari

Diamo per noti gli assiomi e i fondamenti della teoria degli insiemi. Nel corso della tesi indicheremo LST il linguaggio della teoria degli insiemi; ZF è la teoria assiomatica di Zermelo-Fraenkel e ZFC la stessa dotata di assioma di scelta.

Questo primo capitolo è dedicato a richiamare alcuni argomenti di teoria degli insiemi che saranno utilizzati.

### 1.1 Insiemi e classi

È bene ricordare cosa sia una **classe** nella teoria ZF. Essa è semplicemente una *formula sintattica*  $\Phi$  nel linguaggio LST. Se una classe  $A$  *appartiene* ad una qualche classe  $B$ , cioè  $A \in B$ , diremo che  $A$  è **insieme**; chiameremo tutte le altre classi **classi proprie**. La formula rappresentativa  $\Phi$  in effetti identifica la classe

$$\{x \mid x \text{ è insieme} \wedge \Phi(x)\}.$$

Quello che intendiamo far qui notare è che tutti gli altri possibili raggruppamenti d'insiemi, *non* definibili tramite una formula, sono in generale esclusi dalla trattazione. Tutte le volte che parleremo di una classe propria potremo sempre pensarla come rappresentata da una singola formula.

### 1.2 Il linguaggio LST

Almeno all'inizio occorre ricordare che nel corso della tesi lavoreremo su due piani distinti, quello *matematico* e quello *meta-matematico*.

Una formula

$$\Phi(v_1, \dots, v_n)$$

del linguaggio LST non è un oggetto della teoria degli insiemi, bensì un ente astratto — sintattico — che possiamo studiare ad un livello meta-matematico. Ma mediante una codifica opportuna possiamo associare a  $\Phi$  un numero naturale

$$\phi = \ulcorner \Phi(v_1, \dots, v_n) \urcorner \in \omega;$$

diremo che  $\phi$  è il **codice** della formula  $\Phi$ . Tale codice può essere poi studiato dall'interno della teoria degli insiemi. A rigore, dovremmo distinguere addirittura

tra il linguaggio *sintattico* LST ed il linguaggio *oggetto*  $\lceil \text{LST} \rceil$  comprensibile dai modelli della teoria, ma noi non faremo mai tale distinzione.

Passiamo ora sul piano *matematico*. È facile scrivere una formula che, preso  $x$  insieme, dica ‘ $x$  è un naturale che codifica una formula LST’; indichiamo Form l’insieme definito da tale formula. Giacchè lavoriamo all’interno della teoria questo è il meglio che si possa fare. Infatti, sarebbe comodo definire  $\text{Form}' \subseteq \text{Form}$  come l’insieme di tutte e sole le formule codificate  $\lceil \Phi \rceil$ , ma tale definizione non è certo esprimibile con una formula. Ciò lascia aperta la possibilità che un modello non-standard di ZF riconosca come formule degli insiemi che non lo sono.

Indichiamo con  $\text{Sent} \subset \text{Form}$  l’insieme delle formule chiuse, o **enunciati**. Chiamiamo poi **teoria** un insieme  $T \subseteq \text{Sent}$  qualsiasi, non necessariamente chiuso rispetto alla conseguenza logica.

Tuttavia le teorie che studiamo sono più semplici, definibili tramite una formula esplicita; e spesso anzi sono **teorie ricorsive**, per le quali cioè esiste un algoritmo che prende in argomento un elemento  $x \in \text{Sent}$  e in un numero finito di passi dice se  $x$  appartiene o meno alla teoria.

Una definizione alternativa — ma a mio avviso più problematica — potrebbe vedere una teoria  $T$  come una collezione (qualsiasi?) di formule sintattiche e  $\lceil T \rceil \subseteq \text{Sent}$  la sua codifica.

### 1.2.1 Altri linguaggi

LST non è l’unico linguaggio possibile. Noi però consideriamo LST come l’unico linguaggio *sintattico*; tutti gli altri linguaggi  $\mathcal{L}$  sono linguaggi *oggetto* definibili dall’interno della teoria degli insiemi. Vale a dire, in generale un linguaggio  $\mathcal{L}$  sarà un insieme composto di un numero finito simboli logici, più una quantità arbitraria di simboli relazionali, funzionali e di costante (questi ultimi in realtà potrebbero essere evitati perchè le costanti sono funzioni di arietà 0):

$$\mathcal{L} = \mathcal{S} \cup \{R_i \mid i \in I\} \cup \{f_j \mid j \in J\} \cup \{c_k \mid k \in K\}$$

Indicheremo  $|\mathcal{L}| = |I| + |J| + |K| + \aleph_0$  la cardinalità di questo linguaggio.

Anche in questo caso parleremo impropriamente di *codifica di formule*, anche se naturalmente le formule di  $\mathcal{L}$  sono già insiemi per costruzione.

Anche in questo caso esisterà una formula che preso un insieme  $x$  dice ‘ $x$  è numero intero che codifica una formula di  $\mathcal{L}$ ’; e  $\text{Form}_{\mathcal{L}}$  è l’insieme definito da questa formula.

## 1.3 Strutture

Diamo per noto il concetto di **struttura** e di **modello**. Riportiamo qui di seguito alcune delle convenzioni che adotteremo nel corso della tesi.

- $\text{Str}(\mathcal{L})$  è la classe propria delle strutture nel linguaggio  $\mathcal{L}$ . Indicheremo  $\mathcal{M}$  una generica struttura nel linguaggio  $\mathcal{L}$  e  $M = \|\mathcal{M}\|$  il suo dominio. Talvolta ci serviranno strutture il cui dominio è classe propria;

naturalmente esse *non* sono elementi della classe  $\text{Str}(\mathcal{L})$ . Dove non diversamente specificato ci limiteremo a considerare strutture il cui dominio è un insieme.

- Una struttura  $\mathcal{M} \in \text{Str}(\text{LST})$  è costituita di una coppia  $\mathcal{M} = \langle M, E \rangle$ , in cui  $M$  è il dominio mentre  $E \subseteq M \times M$  è la relazione che corrisponde al simbolo  $\in$ . È per noi necessario che  $E$  sia almeno regolare ed estensionale; talvolta la richiederemo anche ben fondata.
- $\text{Mod}(T)$  è la classe propria dei modelli della teoria  $T$ , dove la parola *teoria* ha il significato espresso nella sezione 1.2, è un generico insieme di formule.
- $\text{Th}(\mathcal{M}) \subseteq \text{Form}_{\mathcal{L}}$  è la *teoria di*  $\mathcal{M}$ , intesa come l'insieme degli enunciati soddisfatti da  $\mathcal{M}$ .

Diamo per note anche le nozioni di morfismo, morfismo elementare, isomorfismo tra due strutture, nonché l'equivalenza elementare. A queste funzioni aggiungiamo i morfismi  $\Sigma_n$ -elementari, morfismi che conservano le formule  $\Sigma_n$  (e quindi  $\Pi_n$ ) e quelle di complessità inferiore. Ricordiamo che vale:

$$\begin{array}{c}
 \pi \text{ è isomorfismo} \\
 \Downarrow \\
 \pi \text{ è morfismo elementare} \\
 \Downarrow \\
 \forall n \pi \text{ è morfismo } \Sigma_n\text{-elementare} \\
 \Downarrow \\
 \exists n \pi \text{ è morfismo } \Sigma_n\text{-elementare} \\
 \Downarrow \\
 \pi \text{ è morfismo iniettivo} \\
 \Downarrow \\
 \pi \text{ è morfismo}
 \end{array}$$

e che l'esistenza di un morfismo elementare è in generale più forte dell'elementare equivalenza.

**Notazione.** Scriveremo  $\mathcal{M} < \mathcal{N}$  per indicare che  $\mathcal{M}$  è sottostruttura di  $\mathcal{N}$ , oppure che esiste morfismo tra  $\mathcal{M}$  ed  $\mathcal{N}$ ;  $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$  per indicare che  $\mathcal{M}$  è sottostruttura elementare di  $\mathcal{N}$  oppure che esiste un'immersione elementare tra  $\mathcal{M}$  ed  $\mathcal{N}$ .

### 1.3.1 Relativizzazione di formule

Sia  $\mathcal{M} = \langle M, E \rangle$  una struttura nel linguaggio LST, con dominio una classe qualsiasi. Indichiamo  $M(v)$ ,  $E(x, y)$  le formule rappresentative delle due classi  $M$  ed  $E$ . Sia poi  $\Phi(v_1, \dots, v_n)$  una formula. Allora

$$\Phi(v_1, \dots, v_n)^{\mathcal{M}}$$

è la **relativizzazione** di  $\Phi$  alla struttura  $\mathcal{M}$ :

$$\Phi^{\mathcal{M}} \text{ è } \begin{cases} x = y, & \text{se } \Phi \text{ è } x = y; \\ E(x, y), & \text{se } \Phi \text{ è } x \in y; \\ \neg(\Psi^{\mathcal{M}}), & \text{se } \Phi \text{ è } \neg\Psi; \\ (\Psi^{\mathcal{M}}) \wedge (\Theta^{\mathcal{M}}), & \text{se } \Phi \text{ è } \Psi \wedge \Theta; \\ \exists v(M(v) \wedge \Psi^{\mathcal{M}}), & \text{se } \Phi \text{ è } \exists v\Psi. \end{cases}$$

La definizione può essere generalizzata al caso di formule in un linguaggio  $\mathcal{L}$  qualsiasi, anche se naturalmente in questo caso non lavoreremo sul piano sintattico ma nel linguaggio oggetto. Tale generalizzazione sarà necessaria — ad esempio — per definire funzioni di Skolem in un linguaggio qualsiasi.

### 1.3.2 Soddisfazione di formule

Sia  $\mathcal{M} = \langle M, \in \upharpoonright M \rangle \in \text{Str}(\text{LST})$  una struttura,  $\phi(v_0, \dots, v_n) \in \text{Form}$ ,  $f \in {}^\omega M$ . Allora

$$\mathcal{M} \models \phi[f] \quad (1)$$

è una vera e propria formula di LST, che dice ‘*Il modello  $\mathcal{M}$  soddisfa la formula ottenuta da  $\phi$  sostituendo ad ogni variabile libera  $v_i$  l’elemento  $f(i)$* ’. Essa può essere definita mediante ricorsione; per la precisione, si definisce per ricorsione una funzione

$$\text{Sat}(M, \phi, f) \in \{0, 1\}$$

e poi come formula (1) si sceglie la formula  $\text{Sat}(M, \phi, f) = 1$ . Il problema è che la ricorsione è una costruzione giustificata solo se la relazione su cui si basa è regolare, cosa che in generale *non* vale se  $M$  è classe propria. A noi invece capiterà spesso di lavorare con classi proprie  $\mathcal{M} \models \text{ZF}$ ; in tal caso è possibile definire soltanto delle formule meno ambiziose, ad esempio

$$\mathcal{M} \models_n \phi[f] \quad (2)$$

che esprime la verità limitata a  $\Sigma_n$ -formule  $\phi$ . Questo è in sostanza il teorema di Tarski:

**Teorema 1.1** (Tarski). *Non esiste una formula  $T(v)$  di ZF tale che per ogni enunciato  $\sigma$*

$$\text{ZF} \vdash (\sigma \Leftrightarrow T(\ulcorner \sigma \urcorner))$$

Preso coscienza di tutte queste avvertenze, noi utilizzeremo liberamente la sintassi (1) per classi proprie per comodità notazionale.

Anche il concetto di soddisfazione può essere generalizzato senza troppi problemi a linguaggi  $\mathcal{L}$  arbitrari.

### 1.3.3 Collasso transitivo

Richiamiamo brevemente alcuni risultati, per dimostrare i quali rimandiamo a Kunen [3, §III.5] e Devlin [2, §I.7+II.5].

**Lemma 1.2.** *Sia  $X$  una classe,  $E$  una relazione binaria su  $X$ .*

1. *Se  $E$  è relazione regolare<sup>1</sup> e ben fondata su  $X$ , allora è ben definita la funzione:*

$$\begin{aligned}\pi : X &\rightarrow V \\ \pi(x) &= \{\pi(y) \mid yEx\}\end{aligned}$$

2. *La sua immagine  $M = \pi''X$  è classe transitiva e prende il nome di **collasso transitivo** o **collasso di Mostowski** di  $X$ .*

3.  *$\pi$  è un morfismo, cioè*

$$\pi : \langle X, E \rangle \rightarrow \langle M, \in \rangle$$

4. *Se inoltre  $E$  è estensionale,  $\pi$  è un isomorfismo, cioè*

$$\pi : \langle X, E \rangle \xrightarrow{\sim} \langle M, \in \rangle$$

5. *Se  $X$  è insieme lo è anche il suo collasso transitivo.*

6.  *$M$  è l'unica classe transitiva tale che  $\langle X, E \rangle \cong \langle M, \in \rangle$ .*

Il seguente corollario considera il caso particolare che  $E$  coincida con la relazione di appartenenza  $\in$ :

**Corollario 1.3** (del Collassamento<sup>2</sup>). *Sia  $X$  un insieme,  $\in$  relazione estensionale su  $X$ , cioè  $\langle X, \in \rangle$  soddisfa l'assioma di estensionalità. Allora:*

1.  *$\exists M$  insieme transitivo tale che  $\langle X, \in \rangle \cong \langle M, \in \rangle$ .*
2. *L'insieme  $M$  e l'isomorfismo  $\pi : X \xrightarrow{\sim} M$  sono unici; essi sono, rispettivamente, il collasso transitivo e la funzione  $\pi$  del lemma 1.2.*
3. *Se  $Y \subseteq X$  è transitivo,  $\pi \upharpoonright Y = id \upharpoonright Y$ .*

**Lemma 1.4** (di Condensazione di Gödel<sup>3</sup>). *Sia  $X$  un insieme,  $\delta$  un ordinale limite e*

$$\langle X, \in \rangle \prec_1 \langle L_\delta, \in \rangle$$

*cioè  $X$  sia immersione  $\Sigma_1$ -elementare di  $L_\delta$ . Allora  $\langle X, \in \rangle$  è estensionale, dunque sono soddisfatte le ipotesi del corollario 1.3. In tal caso l'insieme  $M$  del corollario 1.3 è  $L_\alpha$  per un opportuno  $\alpha \leq \delta$ .*

<sup>1</sup>Nell'originale: *set-like*. Significa che le classi di equivalenza sono insiemi.

<sup>2</sup>Nell'originale *Collapsing Lemma*.

<sup>3</sup>Nell'originale: *Condensation Lemma*.

Segue quasi immediatamente dal lemma 1.11. Il *Lemma di Condensazione* è interessante solo per  $\delta > \omega$ , perchè per ogni  $\delta$  si dimostra  $L_\omega \subseteq X$ .

Proviamo quindi a mettere insieme i due lemmi, per scegliere una struttura  $\mathcal{M}$  con proprietà sufficientemente ‘buone’:

1. Sia  $E$  regolare, ben fondata, estensionale su  $X$ :

$$\langle X, E \rangle \cong \langle M, \in \rangle$$

2. Sia inoltre  $\langle X, E \rangle \prec \langle L_\delta, \in \rangle$ . Ne segue  $\langle M, \in \rangle \prec \langle L_\delta, \in \rangle$  e quindi

$$\langle X, E \rangle \cong \langle L_\alpha, \in \rangle$$

per un  $\alpha$  ordinale opportuno.

Ricordiamo infine il seguente:

**Lemma 1.5.** *Se  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{N}$  sono modelli interni e  $j : \mathcal{M} \prec_1 \mathcal{N}$  è morfismo  $\Sigma_1$ -elementare allora:*

1.  *$j$  manda ordinali in ordinali e su di essi è crescente;*
2. *se  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$  oppure  $\mathcal{M} \models \text{AC}$  ed inoltre  $j$  non è l'identità, allora  $j \upharpoonright \text{On}^{\mathcal{M}}$  non è l'identità.*  
*In particolare chiamiamo **punto critico** di  $j$  il minimo  $\delta$  tale che  $j(\delta) > \delta$ .*
3.  *$j : \mathcal{M} \prec_n \mathcal{N}$  per ogni  $n$ .*

Però non possiamo concludere  $j : \mathcal{M} \prec \mathcal{N}$  perchè  $\mathcal{M}$  ed  $\mathcal{N}$  sono classi proprie.

### 1.3.4 Ultrapotenze

**Notazione.** Laddove non ci siano ambiguità per indicare una  $n$ -tupla  $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$  scriveremo  $\vec{x} \in X$ .

Sia  $U$  un ultrafiltro su un insieme  $S$ ,  $\langle M_s \mid s \in S \rangle$  una famiglia di strutture nello stesso linguaggio  $\mathcal{L}$ . Per ora imponiamo che i domini  $M_s$  siano insiemi. L'**ultraprodotto**  $P = \prod_U M_s$  è la struttura così definita:

- Il sostegno è l'insieme prodotto  $\prod_{s \in S} M_s$  considerato a meno di equivalenza:

$$\forall f, g \in \prod_{s \in S} M_s \quad f \sim g \Leftrightarrow \{s \in S \mid f(s) = g(s)\} \in U$$

$$\prod_U M_s = \left\{ [f]_U \mid f \in \prod_{s \in S} M_s \right\}$$

dove con  $[f]_U$  intendiamo la classe d'equivalenza della funzione  $f$ .

- Per ogni simbolo relazionale  $R$  di  $\mathcal{L}$ ,

$$R^P(\overrightarrow{[f]_U}) \Leftrightarrow \{s \in S \mid M_s \models R(\overrightarrow{f(s)})\} \in U.$$

- Per ogni simbolo funzionale  $f$  di  $\mathcal{L}$ ,

$$F^P(\overrightarrow{[f]_U}) = [g]_U \Leftrightarrow \{s \in S \mid M_s \models F(\overrightarrow{f(s)}) = g(s)\} \in U$$

ossia anche

$$F^P(\overrightarrow{[f]_U}) = [\langle F^{M_s}(\overrightarrow{f(s)}) \mid s \in S \rangle]_U.$$

- Per ogni simbolo di costante  $c$  di  $\mathcal{L}$ ,

$$c^P = [\langle c^{M_s} \mid s \in S \rangle]_U.$$

Interessante è il caso in cui tutte le strutture  $M_s$  coincidano — le indico tutte  $M$ ; in tal caso l'ultraprodotto prende il nome di **ultrapotenza** ed è indicato anche  ${}^S M/U$ .

Ricordiamo il teorema fondamentale degli ultraprodotti:

**Teorema 1.6** (Łos).

$$\prod_U M_s \models \varphi(\overrightarrow{[f]_U}) \Leftrightarrow \{s \in S \mid M_s \models \varphi(\overrightarrow{f(s)})\} \in U$$

**Corollario 1.7.** Indichiamo  $c_x$  la funzione su  $S$  che vale costantemente  $x$ .

Allora  $M \prec {}^S M/U$  associando ad ogni punto  $x \in M$  la classe  $[c_x]_U$ .

### 1.3.5 Funzioni di Skolem

Sia  $\mathcal{M}$  una struttura in un certo linguaggio  $\mathcal{L}$ , di dominio una classe qualsiasi  $M$ , e sia  $R$  un buon ordine su  $M$ . Sia poi  $\varphi(v_0, \dots, v_n)$  una formula. La funzione di Skolem di  $\varphi$  in  $\mathcal{M}$ , secondo il buon ordine  $R$ , è:

$$h_\varphi^{\mathcal{M}} : \quad M^n \quad \rightarrow \quad M \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto \begin{cases} \emptyset & \text{se } \neg \exists w \in M \varphi^{\mathcal{M}}[w, x_1, \dots, x_n] \\ t & \text{se } t = \min_R \{w \in M \mid \varphi^{\mathcal{M}}[w, x_1, \dots, x_n]\} \end{cases}$$

$H(\mathcal{M}) = \{h_\varphi \mid \varphi \text{ formula di } \mathcal{L}\}$  è l'insieme delle funzioni di Skolem in  $\mathcal{M}$ ; la chiusura di Skolem di un sottoinsieme  $X \subseteq M$  è la chiusura rispetto ad  $H(\mathcal{M})$ :

$$\text{Cl}_{H(\mathcal{M})}(X) = \{h(\vec{x}) \mid h \in H(\mathcal{M}), \vec{x} \in X\};$$

Non sono necessari elementi oltre questi perchè  $H(\mathcal{M})$  è già chiuso rispetto alla composizione funzionale.

Laddove non ci siano ambiguità indicheremo semplicemente  $h_\varphi$  anzichè  $h_\varphi^{\mathcal{M}}$ : molto spesso infatti sarà  $\mathcal{M} = L$ , la classe dei costruibili, ed  $R = <_L$  il buon ordine naturale su  $L$ .

La principale applicazione delle funzioni di Skolem è il seguente:

**Lemma 1.8** (Löwenheim-Skolem all'ingiù). *Sia  $\mathcal{M} = \langle M, \dots \rangle$  una struttura in un certo linguaggio  $\mathcal{L}$ ,  $X \subseteq M$ . Indico  $\mathcal{N} = \langle \text{Cl}_{H(\mathcal{M})}(X), \dots \rangle$ . Allora:*

$$\mathcal{N} \prec \mathcal{M}.$$

*Questa è la più piccola sottostruttura elementare di  $\mathcal{M}$  contenente  $X$  nel suo dominio. La cardinalità del dominio è*

$$|X| \leq |\text{Cl}_{H(\mathcal{M})}(X)| \leq |X| + |\mathcal{L}|$$

*In particolare se  $X$  è infinito e il linguaggio è numerabile  $|\text{Cl}_{H(\mathcal{M})}(X)| = |X|$ .*

### 1.3.6 La classe dei costruibili

Ricordiamo alcune definizioni.

**Definizione 1.9.** Sia  $\mathcal{B} = \langle B, E \rangle \in \text{Str}(\text{LST})$ ,  $P \subseteq B$ . Un sottoinsieme  $X \subseteq B$  si dice **definibile a parametri in  $P$**  se esiste una formula  $\varphi(v_0, \dots, v_n)$  ed esistono parametri  $\vec{p} \in P$  tale che

$$X = \{x \in B \mid \mathcal{B} \models \varphi[x, \vec{p}]\}$$

Indichiamo poi:

$$\begin{aligned} \text{def}_P(\mathcal{B}) &:= \{X \subseteq B \mid X \text{ è definibile in } \mathcal{B} \text{ a parametri in } P\} \\ \text{def}(\mathcal{B}) &:= \text{def}_B(\mathcal{B}) \end{aligned}$$

**Definizione 1.10.** La classe dei costruibili è

$$L = \bigcup_{\alpha \in \text{On}} L_\alpha,$$

dove:

$$\begin{cases} L_0 &= \emptyset \\ L_{\alpha+1} &= \text{def}(L_\alpha) \\ L_\delta &= \bigcup_{\alpha < \delta} L_\alpha \end{cases}$$

Diamo per note le proprietà basilari di  $L$ ; richiamiamo solo quelle che ci servono strettamente.

Su  $L$  esiste un buon ordinamento ‘naturale’; inoltre, se  $\delta$  è un ordinale limite non numerabile, tale relazione è assoluta tra  $L$  e tutti gli  $L_\delta$ :

$$\forall x, y \in L_\delta ((L \models x <_L y) \Leftrightarrow (L_\delta \models x <_{L_\delta} y))$$

Ci sarà utile il seguente:

**Lemma 1.11.** *Esiste un enunciato  $\sigma_0$  di LST tale che per ogni classe transitiva  $N$*

$$\langle N, \in \rangle \models \sigma_0 \text{ sse } (N = L \text{ oppure } N = L_\gamma \text{ per } \gamma > \omega \text{ ordinale limite}).$$

per la dimostrazione del quale rimandiamo a Devlin [2].

### 1.3.7 Linguaggi e strutture di ordine superiore al primo

Per **linguaggio di ordine  $r$**  intendiamo un linguaggio  $\mathcal{L}$  costituito di più tipi di variabili: le chiameremo *variabili di tipo  $i$*  per  $0 \leq i < r$ , e le indicheremo  $v_n^i$ . Le variabili non possono essere confuse tra loro: se  $D$  è il dominio di una struttura di  $\mathcal{L}$ , le variabili di tipo 0 variano in  $D$ ; le variabili di tipo 1 variano in  $\mathcal{P}(D)$ ; le variabili di tipo 2 variano in  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(D))$ ; e le variabili di tipo  $i$  in generale variano in  $\mathcal{P}^i(D)$ , dove con  $\mathcal{P}^i$  intendiamo l'iterazione di  $i$  volte l'operatore  $\mathcal{P}$ . Spesso le variabili di tipo 0 sono dette *individuali*, e  $D$  è detta **specie degli individui**; quelle di tipo 1 sono *relazionali*, e  $\mathcal{P}(D)$  è la **specie delle relazioni**.

Ulteriori generalizzazioni — che noi non contempliamo — prevedono l'esistenza di più tipi di variabili individuali, ciascuna che varia entro una specie individuale differente.

Essendo le variabili di specie diverse, sono necessari anche quantificatori distinti per ogni specie: li indicheremo  $\forall^0, \dots, \forall^{r-1}$  e  $\exists^0, \dots, \exists^{r-1}$ .

Possiamo dare due costruzioni diverse per una **struttura di ordine  $r$** . Nel **primo caso**, usiamo come universo della struttura l'unione disgiunta di  $r$  universi:

$$U = D \cup \mathcal{P}(D) \cup \dots \cup \mathcal{P}^{r-1}(D)$$

$$\mathcal{M} = \langle U, \dot{D}, \dot{D}_1, \dots, \dot{D}_{r-1}, \dots \rangle$$

Gli  $r$  simboli che seguono  $U$  sono relazioni unarie che permettono di determinare in ogni momento a quale specie appartiene un determinato oggetto. In questo modo i simboli  $\exists^i$  sono solo delle abbreviazioni:

$$\exists^i x \varphi \equiv \exists x (\dot{D}_i(x) \wedge \varphi)$$

Si presentano però alcuni inconvenienti: occorre convenire che le variabili  $v_n^i$  possono variare solo sui rispettivi domini; inoltre una qualsiasi funzione sugli individui risulta essere una funzione parziale sull'insieme universo.

Noi scegliamo quindi la **seconda rappresentazione**: ci sono  $r$  universi distinti, che sono  $D, \dots, \mathcal{P}^{r-1}(D)$ ; ciascuna delle variabili di tipo  $i$  può variare solo all'interno del proprio universo  $\mathcal{P}^i(D)$ . Per ogni funzione o relazione diventa necessario specificare a quale specie appartengono i suoi argomenti; ma un vantaggio è che una funzione totale su  $D$  continuerà ad essere vista come una funzione totale.

$$\mathcal{M} = \langle D, \dots, \mathcal{P}^{r-1}(D), \dots \rangle$$

### 1.3.8 Complessità di formule di ordine superiore al primo

In un linguaggio del primo ordine possiamo classificare le formule secondo la gerarchia di Levy; vorremmo generalizzare tale classificazione a linguaggi di ordine qualsiasi.

Sia dunque  $\mathcal{L}$  un linguaggio di ordine  $r$ , con variabili e quantificatori di tipo  $0, \dots, r-1$ . Sia  $m < r$  un numero naturale. Chiamiamo **limitato** un quantificatore di tipo 0 (individuale) della forma  $\forall^0 x^0 \in u^0(\dots)$ .

- Una formula è  $\Delta_0^m$  o  $\Sigma_0^m$  o  $\Pi_0^m$  se contiene variabili di tipo massimo  $m$ , quantificatori di tipo massimo  $m - 1$ , ed eventualmente quantificatori di tipo 0 limitati.
- In particolare una formula  $\Delta_0^0$  può contenere solo variabili di tipo 0 e i suoi quantificatori devono essere limitati; quindi tale formula è  $\Delta_0$ .
- Una formula è  $\Sigma_{n+1}^m$  se è della forma

$$\exists^m x_1 \dots \exists^m x_k \psi$$

dove  $\psi$  è  $\Pi_n^m$ .

- Una formula è  $\Pi_{n+1}^m$  se è della forma

$$\forall^m x_1 \dots \forall^m x_k \psi$$

dove  $\psi$  è  $\Sigma_n^m$ ;

- In pratica una formula  $\Sigma_n^m$  o  $\Pi_n^m$  è composta di una successione di  $n$  blocchi alternati di quantificatori di tipo  $m$ , seguita da una formula  $\Delta_0^m$ .
- $\Delta_n^m := \Sigma_n^m \cap \Pi_n^m$ .

Si dimostra facilmente che

1. La negazione di una formula  $\Pi_n^m$  è  $\Sigma_n^m$  e viceversa.
2. Ogni formula è equivalente ad un'altra in *forma normale*:

$$Q_1 x_1 \dots Q_k x_k \psi$$

in  $\psi$  è formula  $\Delta_0^0$ , ma due quantificatori successivi non sono necessariamente diversi. Inoltre non si dice nulla sul tipo di questi quantificatori. Segue che ogni formula  $\varphi$  è equivalente ad una che rientra nelle catalogazioni precedenti.

Con un numero sufficiente di assiomi — ad esempio nella struttura che chiameremo  $\mathcal{A}^2$  — si può dimostrare anche che:

1. Ogni formula è equivalente ad un'altra in una *seconda forma normale*:

$$Q_1^m x_1^m \dots Q_k^m x_k^m \dots \dots Q_1^0 x_1^0 \dots Q_j^0 x_j^0 \psi$$

in cui due quantificatori successivi sono diversi,  $\psi$  è formula  $\Delta_0^0$ . (Ho contratto i quantificatori nella *forma normale* e li ho ordinati per tipo).

2. Di più: se ci sono quantificatori funzionali, i quantificatori individuali possono essere ridotti ad un solo quantificatore; ma chiariremo questa proprietà in seguito.

## 1.4 Proprietà dell'insieme perfetto

Può esserci utile richiamare la cosiddetta ‘*proprietà del (sotto-)insieme perfetto*’<sup>4</sup>, che indicheremo per brevità p.s.p.. Si confronti Kanamori [1, §11] oppure Cantor [4], del quale però mi risulta esista solo la versione originale tedesca.

**Definizione 1.12.** Se  $S$  è uno spazio topologico e  $A$  un suo sottoinsieme, diciamo che  $A$  è **perfetto** se è privo di punti isolati.

**Definizione 1.13.** Chiamiamo **spazio polacco** uno spazio separabile completamente metrizzabile.

**Proposizione 1.14** (Cantor). *Se  $S$  è spazio polacco e  $A$  un sottoinsieme perfetto non vuoto, si può iniettare in modo continuo in  $A$  lo spazio di Cantor  ${}^\omega 2$ ; e dunque  $A$  contiene almeno  $2^{\aleph_0}$  punti.*

**Definizione 1.15.** Diciamo che uno spazio polacco  $S$  gode della p.s.p. se, preso un qualunque sottoinsieme  $A \subseteq S$ , o è numerabile o contiene un sottoinsieme perfetto.

Siamo interessati al caso  $S = \mathbb{R}$ . Se  $\mathbb{R}$  godesse della p.s.p. potremmo dedurre che ogni suo sottoinsieme ha cardinalità  $\omega$  oppure  $2^\omega$  e dunque varrebbe CH; questo ci conferma che non si può dimostrare in ZFC che  $\mathbb{R}$  goda della p.s.p.. Si può anzi dimostrare il contrario:

**Proposizione 1.16.** *Esiste un insieme  $A \subset \mathbb{R}$  che non contiene lo spazio di Cantor ed il cui complementare non contiene lo spazio di Cantor. Quindi,  $\mathbb{R}$  non gode della p.s.p..*

Di più, questa proprietà vale per ogni spazio polacco più che numerabile.

In realtà lavoriamo solo su due spazi polacchi, lo **spazio di Baire**  ${}^\omega \omega$  e lo **spazio di Cantor**  ${}^\omega 2$ , perchè si dimostra che tutti gli altri sono riconducibili in qualche modo a questi.

## 1.5 Clubs

Ricordiamo per il momento solo la seguente definizione:

**Definizione 1.17.** Per un cardinale  $\kappa$ , un insieme  $C \subseteq \kappa$  è **club** (closed unbounded) se è illimitato in  $\kappa$  ed è chiuso nella topologia ordinale di  $\kappa$ ; vale a dire, contiene tutti i suoi punti di accumulazione.

Lo studio dei club sarà affrontato nei capitolo 3, ma incontreremo alcuni club già nel prossimo capitolo.

## 1.6 Colorazioni

**Definizione 1.18.** Siano  $A$  e  $C$  insiemi,  $\gamma$  un ordinale. Chiamiamo **colorazione** una funzione

$$f : [A]^\gamma \rightarrow C$$

<sup>4</sup>Nell'originale: *perfect set property*.

dove  $[A]^\gamma = \{x \subseteq A \mid \text{ot}(x) = \gamma\}$ .

Chiamiamo poi **omogeneo** un sottoinsieme  $B \subseteq A$  tale che  $f \upharpoonright [B]^\gamma$  sia costante.

Un problema che si pone molto spesso è trovare un insieme omogeneo che sia anche *grande* in un qualche senso. A noi basterà il seguente:

**Teorema 1.19** (Teorema di Ramsey infinito). *Sia  $A$  un insieme infinito,  $k, n$  numeri interi,  $f : [A]^k \rightarrow n$  una colorazione.*

*Allora esiste un insieme  $B \subseteq A$  infinito e omogeneo per  $f$ .*

Il teorema generalizza il principio dei cassetti, al quale si riduce per  $k = 1$ .

Un secondo teorema analogo che useremo è il 3.20, nel quale per misurare la *grandezza* non si userà più la cardinalità ma piuttosto l'appartenenza ad un dato ultrafiltro.

Una migliore trattazione dell'argomento affronta lo studio delle **proprietà di partizionamento**, per le quali rimandiamo a Kanamori[1, §7]; ma nello specifico di questa tesi non saranno necessarie.

## 1.7 Cardinali indescrivibili

Introduciamo qui il concetto di cardinale indescrivibile, che utilizzeremo soltanto per dimostrare un teorema riguardante  $0^\#$ . La seguente definizione richiede in realtà la nozione di formula  $\Sigma_n^m$ , che diamo qui per nota ma che sarà enunciata meglio in seguito.

**Definizione 1.20.** Siano  $m, n \in \omega$ . Diciamo che un cardinale  $\kappa$  è  **$\Sigma_n^m$ -indescrivibile** (risp.  **$\Pi_n^m$ -indescrivibile**) se per ogni  $\Sigma_n^m$ -enunciato  $\sigma$  (risp.  $\Pi_n^m$ -enunciato  $\sigma$ )

$$\langle V_\kappa, \in, R \rangle \models \sigma \Rightarrow \exists \alpha < \kappa \langle V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha \rangle \models \sigma$$

In altre parole, non c'è alcun  $\Sigma_n^m$ -enunciato (o  $\Pi_n^m$ -enunciato), neanche con una relazione aggiuntiva  $R \subseteq V_\kappa$ , che caratterizza  $\langle V_\kappa, \in \rangle$ .

Diciamo che  $\kappa$  è **totalmente indescrivibile** se è  $\Pi_n^m$ -indescrivibile per ogni  $m$  ed  $n$ .

**Lemma 1.21.** *Supponiamo  $\kappa$  inaccessible,  $R \subseteq V_\kappa$  una relazione unaria. Allora*

$$\{\alpha < \kappa \mid \langle V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha \rangle \prec \langle V_\kappa, \in, R \rangle\}$$

*è club in  $\kappa$ .*

*Dimostrazione.* È immediato che sia chiuso, perchè l'unione di una successione di sottostrutture elementari è ancora sottostruttura elementare.

Per dimostrare che è illimitato, fissiamo  $\alpha_0 < \kappa$ . Definiamo ricorsivamente  $\alpha_n$  nel seguente modo:

$$\alpha_{n+1} = \min\{\beta > \alpha_n \mid \forall y_1, \dots, y_k \in V_{\alpha_n} \forall \varphi \in \text{Form} \\ (\langle V_\kappa, \in, R \rangle \models \exists v \varphi(v, y_1, \dots, y_k) \Rightarrow \exists x \in V_\beta \langle V_\beta, \in, R \rangle \models \varphi(x, y_1, \dots, y_k))\}$$

Induttivamente osserviamo che tutti gli  $\alpha_n$  sono minori di  $\kappa$ : infatti esso è inaccessible, quindi  $|V_{\alpha_n}| < \kappa$ , quindi per regolarità questi  $\beta$  non possono raggiungere  $\kappa$ .

Poniamo poi  $\alpha := \sup\{\alpha_n \mid n \in \omega\} < \kappa$  per regolarità. Per costruzione, applicando il criterio di Tarski–Vaught,  $\langle V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha \rangle$  è sottostruttura elementare di  $\langle V_\kappa, \in, R \rangle$ .  $\square$

**Teorema 1.22** (Hanf-Scott).

(a) Un cardinale è  $\Sigma_{n+1}^1$ -indescrivibile sse è  $\Pi_n^1$ -indescrivibile.

(b) Un cardinale è fortemente inaccessible sse è  $\Sigma_1^1$ -indescrivibile.

*Dimostrazione.*

(a) Basta dimostrare l'implicazione  $\Leftarrow$ . Sia  $\sigma$  enunciato  $\Sigma_{n+1}^1$ , cioè equivalente a  $\exists^1 x \psi(x)$ ;

$$\begin{aligned} \langle V_\kappa, \in, R \rangle \models \sigma &\Leftrightarrow \exists S \subseteq V_\kappa \langle V_\kappa, \in, R \rangle \models \psi(S) \\ &\text{che è enunciato aggiungendo il simbolo } S: \\ &\Leftrightarrow \exists S \subseteq V_\kappa \langle V_\kappa, \in, R, S \rangle \models \psi(S) \\ &\Leftrightarrow \exists S \subseteq V_\kappa \exists \alpha < \kappa \langle V_\alpha, \in, R, S \rangle \models \psi(S) \\ &\text{per } \Pi_n^1\text{-indescrivibilità; quindi:} \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha < \kappa \langle V_\alpha, \in, R \rangle \models \sigma \end{aligned}$$

(b) Per (a) ci basta dimostrare che  $\kappa \in \text{Card}$  è inaccessible sse è  $\Pi_0^1$ -indescrivibile.

Ma  $\Pi_0^1 = \Delta_0^1$ , significa che le formule considerate non possono contenere quantificatori di tipo  $> 0$ . Dimostriamo qualcosa di più:  $\kappa$  è inaccessible sse esiste un  $\alpha < \kappa$  per cui  $\langle V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha \rangle \prec \langle V_\kappa, \in, R \rangle$ .

$\Rightarrow$ ) Segue dal lemma 1.21.

$\Leftarrow$ ) Chiaramente  $\kappa > \omega$ ; altrimenti dovrei trovare una sottostruttura  $V_n \prec V_\omega$ , il che è assurdo perchè  $V_n$  è infinito ma  $V_\omega$  no.

$\kappa$  deve essere regolare: altrimenti, fissiamo una funzione cofinale  $F : \beta \rightarrow \kappa$  con  $\beta < \kappa$ . Poniamo  $R = \beta \cup F$ , e troviamo per ipotesi  $\langle V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha \rangle \prec \langle V_\kappa, \in, R \rangle$ .  $\beta$  è definibile da  $R$ , quindi deve stare anche in  $V_\alpha$ ; e pertanto  $F$  è definibile in  $V_\alpha$ . Ma d'altra parte  $F$  ha immagine  $\kappa$ , quindi non può stare tutta in  $V_\alpha$ ,  $\perp$ .

Infine,  $\kappa$  è fortemente limite; altrimenti, fissiamo un cardinale  $\lambda < \kappa$  tale che  $2^\lambda \geq \kappa$ . Poi fissiamo  $G : \mathcal{P}(\lambda) \rightarrow \kappa$  suriettiva, e  $R = \{\lambda + 1\} \cup G$ . Come prima, troviamo  $\alpha$  per cui  $\langle V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha \rangle \prec \langle V_\kappa, \in, R \rangle$ , dev'essere  $\lambda + 1 \in V_\alpha$ . Ma allora anche  $\mathcal{P}(\lambda) \in V_\alpha$ , mentre  $G$  non può stare tutta in  $V_\alpha$ ,  $\perp$ .

$\square$



## Capitolo 2

# La definizione di 0 Sharp

In questo capitolo seguo approssimativamente la presentazione di Kanamori [1, §9]; alcune dimostrazioni sono invece tratte da Devlin [2, §3–5].

### 2.1 Indiscernibilità e caratteri

**Definizione 2.1.** Siano  $\mathcal{M} = \langle M, \dots \rangle$  una struttura in un certo linguaggio  $\mathcal{L}$ ,  $X \subseteq M$ , e sia  $<$  una relazione di ordine totale su  $X$ .  $\langle X, < \rangle$  è detto **insieme di indiscernibili** per  $\mathcal{M}$  se per ogni formula  $\varphi(v_1, \dots, v_n)$  in  $\mathcal{L}$  e per ogni coppia di  $n$ -uple  $x_1 < \dots < x_n$  e  $y_1 < \dots < y_n$  in  $X$ ,

$$\mathcal{M} \models \varphi(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi(y_1, \dots, y_n)$$

I suoi elementi saranno detti **indiscernibili** per la struttura  $\mathcal{M}$ .

Il concetto di insieme di indiscernibili risale ad Andrzej Ehrenfeucht ed Andrzej M. Mostowski, ed era legato allo studio di modelli aventi un grande numero di automorfismi.

A priori non sappiamo se un insieme di indiscernibili esista o meno in una data struttura  $\mathcal{M}$ . Vale però la seguente:

**Proposizione 2.2** (Ehrenfeucht–Mostowski). *Sia  $T$  una teoria in un certo linguaggio  $\mathcal{L}$  con almeno un modello infinito, e  $X$  un insieme totalmente ordinato.*

*Allora  $\exists \mathcal{M} \in \text{Mod}(T)$  tale che  $X$  è nel suo dominio ed  $X$  è un insieme di indiscernibili per  $\mathcal{M}$ .*

*Dimostrazione.* Espandiamo il linguaggio mediante i simboli di costante  $c_x$ , uno per ogni elemento  $x \in X$ :

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c_x \mid x \in X\}$$

Espandiamo poi la teoria:

$$\begin{aligned} \bar{T} := & T \cup \{c_x \neq c_y \mid x, y \in X, x \neq y\} \cup \\ & \cup \{\varphi(c_{x_1}, \dots, c_{x_m}) \Leftrightarrow \varphi(c_{y_1}, \dots, c_{y_m}) \mid \varphi \text{ formula di } \mathcal{L} \\ & \wedge x_1 < \dots < x_m, y_1 < \dots < y_m \in X\} \end{aligned}$$

Ci basta dimostrare che  $\bar{T}$  è teoria consistente, cioè soddisfacibile. A questo scopo utilizziamo il teorema di compattezza: dimostriamo che sono consistenti tutte le sotto-teorie finite di  $\bar{T}$ . Ne fissiamo una,  $T'$ , nella quale compaiano soltanto  $m$  simboli di costante  $c_{x_1}, \dots, c_{x_m}$  e  $n$  formule  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  prefissate.

La teoria  $T$  ammette modelli infiniti: ne prendiamo uno, che indichiamo  $\mathcal{M}$ . Fissiamo poi un insieme numerabile  $A = \{a_i \mid i \in \omega\}$  sottoinsieme del dominio  $\|\mathcal{M}\|$ . Definiamo poi

$$f: A \longrightarrow {}^n 2 \\ a \mapsto (T(\varphi_1(a)), \dots, T(\varphi_n(a)))$$

dove  $T$  è la funzione che assegna il valore di verità secondo  $\mathcal{M}$ :

$$T(\varphi_j(a)) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathcal{M} \not\models \varphi_j(a) \\ 1 & \text{se } \mathcal{M} \models \varphi_j(a) \end{cases}$$

Grazie al teorema di Ramsey 1.19 troviamo  $B \subseteq A$  infinito (cioè numerabile) ed omogeneo: significa che gli elementi di  $B$  sono ‘indiscernibili’ se ci limitiamo a considerare solo le formule  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ :

$$\mathcal{M} \models \varphi_j(x_1, \dots, x_k) \iff \mathcal{M} \models \varphi_j(y_1, \dots, y_k)$$

ogni volta che  $x_1 < \dots < x_k, y_1 < \dots < y_k$  stanno in  $B$ .

Consideriamo ora un’espansione del linguaggio  $\mathcal{L}$ :

$$\mathcal{L}'' = \mathcal{L} \cup \{c_{x_1}, \dots, c_{x_m}\}$$

e consideriamo un’espansione  $\mathcal{N}$  di  $\mathcal{M}$  in  $\mathcal{L}''$  in cui si interpretano i nuovi simboli di costante come  $m$  elementi qualsiasi — purchè in ordine crescente — di  $B$ . Grazie alle osservazioni precedenti,  $\mathcal{N}$  soddisfa la teoria  $T'$ ; dunque  $\bar{T}$  è finitamente soddisfacibile, e quindi soddisfacibile. □

**Definizione 2.3.** Sia  $\mathcal{L}^* = \text{LST} \cup \{c_k \mid k \in \omega\}$  un’estensione numerabile del linguaggio LST; sia  $\delta > \omega$  un ordinale limite. Ipotizziamo che  $L_\delta$  sia dotato di un insieme numerabile di ordinali indiscernibili  $X \subset \text{On}^{L_\delta}$  e sia  $\langle x_k \mid k \in \omega \rangle$  la sua enumerazione crescente. Sia infine  $\mathcal{M} = \langle L_\delta, \in, x_k \rangle_{k \in \omega} \in \text{Str}(\mathcal{L}^*)$ .

Allora chiamiamo **carattere**<sup>1</sup> la teoria

$$T = \text{Th}(\mathcal{M}) \subseteq \omega$$

nel linguaggio  $\mathcal{L}^*$ .

Indichiamo in tal caso  $T^-$  la sua restrizione al linguaggio  $\mathcal{L}$ .

**Osservazione 2.4.** Un carattere è una teoria completa.

**Osservazione 2.5.** Tutti i modelli di  $T$  sono infiniti.

**Osservazione 2.6.** Se  $\mathcal{M} \in \text{Mod}(T)$  allora  $\mathcal{M} \equiv L_\delta$ .

<sup>1</sup>Nell’originale: *EM-blueprint*, dove EM sta per Ehrenfeucht-Mostowski e blueprint significa letteralmente *cianografia*.

**Osservazione 2.7.** È possibile che  $L_\delta$  abbia un insieme più che numerabile di indiscernibili  $X'$ , con  $X \subset X'$ ; in tal caso potremmo pensare di estendere ulteriormente il linguaggio con un simbolo di costante per ogni elemento di  $X'$ . Tuttavia per definizione di indiscernibilità la restrizione al linguaggio  $\mathcal{L}^*$  sarebbe la stessa.

**Lemma 2.8.** *Supponiamo  $T$  un carattere e sia  $T^-$  la sua restrizione al linguaggio LST.*

1. Per ogni  $\alpha \in \text{On}$  esiste una struttura  $\mathcal{M}_\alpha = \langle M_\alpha, E_\alpha, \dots \rangle \in \text{Str}(\mathcal{L}^*)$  t.c.

(a)  $\mathcal{M}_\alpha$  è modello di  $T^-$ ;

(b)  $\mathcal{M}_\alpha$  possiede un insieme di indiscernibili  $X_\alpha \subset (\text{On})^{\mathcal{M}_\alpha}$  di tipo d'ordine  $\alpha$  secondo  $\mathcal{M}_\alpha$ ;

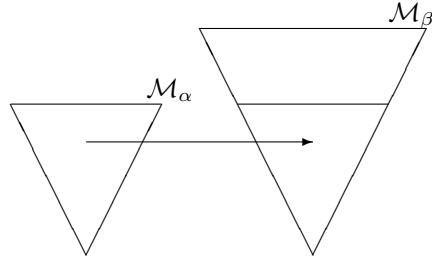
(c) per ogni  $x_0 < \dots < x_n$  in  $X_\alpha$  e per ogni  $\varphi \in \text{Form}$ ,

$$\mathcal{M}_\alpha \models \varphi[x_0, \dots, x_n] \quad \Leftrightarrow \quad T \models \varphi(c_0, \dots, c_n);$$

(d)  $\text{Cl}_{H(\mathcal{M}_\alpha)}(X_\alpha) = M_\alpha$

D'ora in avanti indichiamo  $\mathcal{M}_\alpha$  un modello siffatto,  $X_\alpha$  il suo insieme di indiscernibili e  $\{x_\xi^\alpha \mid \xi < \alpha\}$  l'enumerazione crescente di  $X_\alpha$ . Per essere più rigorosi — ma pedanti — dovremmo invece indicare  $\mathcal{M}_\alpha^T$  e  $X_\alpha^T$ .

2. Se  $\alpha \leq \beta$ , allora esiste un'immersione elementare  $\mathcal{M}_\alpha \prec \mathcal{M}_\beta$ .



Possiamo scrivere esplicitamente un'immersione nel seguente modo. Sia  $r : X_\alpha \rightarrow X_\beta$  una qualsiasi funzione crescente; allora

$$\begin{aligned} \tilde{r} : \quad & \mathcal{M}_\alpha \rightarrow \mathcal{M}_\beta \\ & h_\varphi(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha) \mapsto h_\varphi(r(x_1^\alpha), \dots, r(x_n^\alpha)) \end{aligned}$$

è morfismo elementare che estende  $r$ .

3. Il modello  $\mathcal{M}_\alpha$  è unico a meno di isomorfismo.

4. Sia  $\alpha \leq \beta$ ,  $X' = \{x_\xi^\beta \mid \xi \in \alpha\} \subseteq X_\beta$ ,

$$\mathcal{N} = \langle \text{Cl}_{H(\mathcal{M}_\beta)}(X'), \in, x_k^\beta \rangle_{k \in \omega} \in \text{Str}(\mathcal{L}^*)$$

Allora  $\mathcal{N} \cong \mathcal{M}_\alpha$  con insieme di indiscernibili  $X'$ . Inoltre possiamo costruire un'immersione non banale  $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}_\beta$  scegliendo

$$r : X' \rightarrow X_\beta$$

funzione crescente ma diversa dall'identità, ed estenderla come nel punto 2.

**Osservazione 2.9.** Ricordiamo che la cardinalità dei modelli è

$$|X_\alpha| \leq |M_\alpha| \leq |X_\alpha| + \aleph_0$$

per il lemma 1.8. In particolare sarà  $\aleph_0$  se  $\alpha$  è finito (perchè tutti i modelli sono infiniti) e  $|\alpha|$  in ogni altro caso.

**Osservazione 2.10.** Il punto (1d) equivale a dire che ogni elemento di  $\mathcal{M}_\alpha$  è definibile in  $\mathcal{M}_\alpha$  con parametri in  $X_\alpha$ . In particolare, ogni formula  $\varphi[y_1, \dots, y_n]$  con  $y_1, \dots, y_n \in M_\alpha$  equivale ad un'opportuna  $\psi[x_1, \dots, x_m]$  con  $x_1, \dots, x_m \in X_\alpha$ ; anzi, possiamo scegliere  $x_1 < \dots < x_n$ .

*Dimostrazione.*

1. Iniziamo a costruire  $\mathcal{M} \in \text{Str}(\text{LST})$  che soddisfi i punti (1a) e (1b): l'esistenza di questo modello è un corollario della proposizione 2.2. Infatti, per definizione di carattere,  $T$  ha un modello infinito  $L_\delta$ ; posso scegliere ad esempio  $X_\alpha = \alpha$  e trovare un modello  $\mathcal{M}$  di  $T$  di cui  $\alpha$  è insieme di indiscernibili.

Per soddisfare anche (1c) possiamo estendere la struttura da  $\mathcal{M}$  a  $\mathcal{M}' \in \text{Str}(\mathcal{L}^*)$  interpretando i simboli  $c_k$  come i primi  $\omega$  elementi di  $X_\alpha$ .

Infine, come  $\mathcal{M}_\alpha$  scelgo la chiusura di Skolem di  $X_\alpha$ , che è sottostruttura elementare di  $\mathcal{M}'$  (cfr. lemma 1.8) e rispetta anche la richiesta (1d).

2. Ci occorre dimostrare che  $\tilde{r} : \mathcal{M}_\alpha \rightarrow \mathcal{M}_\beta$  è ben definita ed è un morfismo elementare.

Consideriamo la formula

$$h_\varphi(v_0, \dots, v_n) = h_\psi(v_{n+1}, \dots, v_{n+m})$$

Grazie all'osservazione 2.10 possiamo limitarci a parametri  $x_0 < \dots < x_{n+m}$  in  $X_\alpha$ . Nei seguenti passaggi uso la condizione (1c):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\alpha \models h_\varphi[x_0, \dots, x_n] = h_\psi[x_{n+1}, \dots, x_{n+m}] &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow T \models h_\varphi(c_0, \dots, c_n) = h_\psi(c_{n+1}, \dots, c_{n+m}) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mathcal{M}_\beta \models h_\varphi[r(x_0), \dots, r(x_n)] = h_\psi[r(x_{n+1}), \dots, r(x_{n+m})] & \end{aligned}$$

e dunque le due diverse scritte dello stesso elemento portano alla stessa immagine.

Infine per costruzione  $\tilde{r}$  preserva tutte le formule:  $\forall x_0 < \dots < x_n$  elementi di  $X$ ,

$$\mathcal{M}_\alpha \models \varphi[x_0, \dots, x_n] \Leftrightarrow T \models \varphi(c_0, \dots, c_n) \Leftrightarrow \mathcal{M}_\beta \models \varphi[r(x_0), \dots, r(x_n)].$$

3. Applichiamo il punto precedente prendendo  $\alpha = \beta$  e  $r : X_\alpha \xrightarrow{\sim} X_\beta$  isomorfismo; allora anche  $\tilde{r} : \mathcal{M}_\alpha \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_\beta$  è isomorfismo. Infatti sappiamo già che  $\tilde{r}$  è morfismo elementare, e dunque iniettivo; e la suriettività è palese perchè in questo caso è suriettiva  $r$ .

4. Sappiamo che  $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}_\beta$ , ed inoltre  $\mathcal{N}$  ha un insieme di indiscernibili di ordine  $\alpha$ , quindi per l'unicità dei modelli deve essere  $\mathcal{M}_\alpha$ .

Resta da dimostrare che il morfismo  $\tilde{r} : \mathcal{N} \prec \mathcal{M}_\beta$  è non banale; ma se  $\tilde{r}$  fosse l'identità lo stesso dovrebbe accadere ad  $r$ , che è la sua restrizione su  $X'$ .

Notiamo infine che una siffatta  $r$  non identica esiste perchè  $\text{ot}(X') \leq \text{ot}(X_\beta)$ .

□

**Notazione.** D'ora in avanti adottiamo ipotesi e notazione del lemma 2.8.1.

Introduciamo ora, una alla volta, tre condizioni basilari per un carattere; dimostrando smodata fantasia le indicheremo (I), (II), (III).

Quello che dimostreremo è che (se esiste) il carattere che soddisfa queste proprietà è unico.

## 2.2 Caratteri ben fondati

(I)  $\forall \alpha < \omega_1$  ( $\mathcal{M}_\alpha$  è ben fondata);

Chiameremo **ben fondato** un carattere  $T$  che soddisfi la condizione (I).

**Osservazione 2.11.** Un isomorfismo tra strutture conserva la ben fondatezza; quindi fissato  $\alpha$  l'espressione ' $\mathcal{M}_\alpha$  è ben fondata' si riferisce a tutti i modelli  $\mathcal{M}_\alpha$  possibili.

La limitazione ' $< \omega_1$ ' nella condizione (I) è chiarita dal seguente:

**Lemma 2.12.**  $\forall \alpha \in \text{On}(\mathcal{M}_\alpha \text{ è ben fondata}) \Leftrightarrow \forall \alpha < \omega_1(\mathcal{M}_\alpha \text{ è ben fondata}).$ <sup>2</sup>

*Dimostrazione.* Una implicazione è banale; dimostriamo solo la direzione  $\Leftarrow$ . Immaginiamo per assurdo che esista un modello  $\mathcal{M}_\alpha$  non ben fondato, con  $\alpha > \omega_1$ . Sia quindi  $\langle a_i \mid i \in \omega \rangle$  una successione infinitamente discendente:  $a_{i+1} E_\alpha a_i$ . Il modello è chiusura di Skolem dei suoi indiscernibili:

$$a_i = h_{\varphi^{(i)}} \left( x_1^{(i)}, \dots, x_{\text{ar}(\varphi^{(i)})-1}^{(i)} \right), \quad i \in \omega$$

per opportuni indiscernibili  $x_j^{(i)}$ . Considero l'insieme

$$\left\{ x_{j^{(i)}}^{(i)} \mid i \in \omega, j^{(i)} < \text{ar}(\varphi^{(i)}) \right\}$$

di tutti questi indiscernibili, e osservo che ha tipo d'ordine  $\beta < \omega_1$ ; poi considero la sua chiusura di Skolem  $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}_\alpha$ , e anch'essa non è ben fondata perchè contiene gli  $a_i$ . Ma  $\mathcal{N} = \mathcal{M}_\beta$  per l'unicità dei modelli, e  $\mathcal{M}_\beta$  è ben fondata per ipotesi,  $\perp$ . □

<sup>2</sup>Equivale anche a:  $\exists \alpha \geq \omega_1(\mathcal{M}_\alpha \text{ è ben fondata})$ , cf. Devlin.

**Lemma 2.13.** *Sia  $T$  un carattere che soddisfa (I); allora per ogni  $\alpha$  esiste un modello  $\mathcal{M}_\alpha$  transitivo. Tale modello transitivo è  $\langle L_\gamma, \in \rangle$  per un opportuno ordinale limite  $\gamma$ .*

*Dimostrazione.* Basta applicare il lemma 1.2 e quindi, ricordando che  $\mathcal{M}_\alpha \models T^-$ , per il lemma 1.11 deve essere un qualche  $L_\gamma$ .  $\square$

Questo lemma purtroppo non ci dice nulla circa il valore di  $\gamma$  in funzione di  $\alpha$ .

**Proposizione 2.14.** *Se esiste  $T$  carattere che soddisfa (I), allora  $\mathcal{P}(\omega)^L$  è numerabile. Segue che  $V \neq L$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo  $\alpha = \omega_1$ .  $\mathcal{M}_{\omega_1} \cong L_\gamma$  per un opportuno limite  $\gamma \geq \omega_1$ . Inoltre ricordiamo che  $\mathcal{P}(\omega)^L \in L_{\omega^+}$ , quindi  $\mathcal{P}(\omega)^L \subseteq L_\gamma$ .

Sia dunque  $a \in \mathcal{P}(\omega)^L$ ,  $a \in L_\gamma$  è esprimibile mediante una funzione di Skolem  $a = h_\varphi(x_0, \dots, x_n)$  applicata agli indiscernibili  $x_0 < \dots < x_n$  di  $X_\gamma$ . Se indichiamo  $\langle z_i \mid i \in \omega \rangle$  i primi  $\omega$  indiscernibili, allora  $a = h_\varphi[x_0, \dots, x_n] = h_\varphi[z_0, \dots, z_n]$  ed esistono soltanto una quantità numerabile di formule di questo tipo.

Ne segue che esistono solo una quantità numerabile di insiemi  $a \in \mathcal{P}(\omega)^L$ ; tutti gli altri elementi di  $\mathcal{P}(\omega)$  non sono costruibili, e dunque  $V \neq L$ .  $\square$

## 2.3 Caratteri cofinali

(II) Se  $\varphi(v_0, \dots, v_n)$  è una formula, allora  $T$  contiene l'enunciato:

$$h_\varphi(c_0, \dots, c_{n-1}) \in \text{On} \Rightarrow h_\varphi(c_0, \dots, c_{n-1}) < c_n;$$

Chiameremo **cofinale**<sup>3</sup> un EM-blueprint che soddisfa (II).

**Osservazione 2.15.** Cerchiamo di capire cosa comporta (II).

A partire dalle costanti  $c_0, \dots, c_{n-1}$  non posso costruire alcun ordinale superiore a  $c_n$ :

$$\text{Cl}_{H(\mathcal{M})}(\{c_0, \dots, c_{n-1}\}) \cap \text{On} \subset c_n$$

e non posso neanche costruire insiemi di cardinalità o rango superiori a  $c_n$ ; infatti, se  $h_\varphi(c_0, \dots, c_{n-1}) \in M_\alpha$ , considero le formule

$$\psi(t, v_1, \dots, v_n) : t = |h_\varphi(v_1, \dots, v_n)|$$

$$\chi(t, v_1, \dots, v_n) : t = \text{rank}(h_\varphi(v_1, \dots, v_n))$$

risultano  $h_\psi(c_0, \dots, c_{n-1}) < c_n$  e  $h_\chi(c_0, \dots, c_{n-1}) < c_n$ .

C'è un'altra caratterizzazione:

**Lemma 2.16.** *Sia  $T$  un carattere.  $T$  soddisfa (II) sse  $\forall \alpha > \omega$  ordinale limite,  $\mathcal{M}_\alpha \models (X_\alpha \text{ è cofinale})$ .<sup>4</sup>*

<sup>3</sup>Nell'originale, *cofinal*; credo sarebbe più opportuno tradurre con *illimitato*.

<sup>4</sup>Equivale anche a:  $\exists \alpha > \omega$  ordinale limite,  $\mathcal{M}_\alpha \models (X_\alpha \text{ è cofinale})$ , cf. Devlin.

*Dimostrazione.*

- $\Rightarrow$ ) Sia per assurdo  $\gamma \in \text{On}^{\mathcal{M}_\alpha}$  un maggiorante per  $X_\alpha$ . Sia inoltre  $\gamma = h_\psi[x_0, \dots, x_{n-1}]$ , giacchè  $M_\alpha$  è chiusura di Skolem di  $X_\alpha$ . In quanto maggiorante,  $\gamma = h_\psi[x_0, \dots, x_{n-1}] \geq x_n$  per ogni  $x_n$  indiscernibile maggiore dei precedenti, e dunque  $h_\psi(c_0, \dots, c_{n-1}) \geq c_n$ . Ma per (II)  $h_\psi(c_0, \dots, c_{n-1}) < c_n$ , i due fatti sono in contraddizione.
- $\Leftarrow$ ) Sia  $h_\varphi(c_0, \dots, c_{n-1}) \in \text{On}$ , dimostriamo che è  $< c_n$ . Fissiamo un certo modello  $\mathcal{M}_\alpha$  e degli indiscernibili  $x_0, \dots, x_{n-1}$ ; sia quindi  $x = h_\varphi[x_0, \dots, x_{n-1}]$ . Giacchè  $X_\alpha$  è cofinale possiamo fissare un indiscernibile  $y$  maggiore di  $x$  e di tutti gli indiscernibili precedenti; dunque  $h_\varphi[x_0, \dots, x_{n-1}] < y$  e  $h_\varphi(c_0, \dots, c_{n-1}) < c_n$ .

□

## 2.4 Caratteri notevoli

(III) Se  $\phi(v_0, \dots, v_{m+n+1})$  è una formula, allora  $T$  contiene l'enunciato:

$$h_\phi(c_0, \dots, c_{m+n}) < c_m \Rightarrow h_\phi(c_0, \dots, c_{m+n}) = h_\phi(c_0, \dots, c_{m-1}, c_{m+n+1}, \dots, c_{m+2n+1}).$$

La condizione (III) viene detta **condizione notevole** e dunque un carattere è notevole se la soddisfa.<sup>5</sup>

**Osservazione 2.17.** Per indiscernibilità, (III) equivale a:

$$h_\phi(c_0, \dots, c_{m+n}) < c_m \Rightarrow h_\phi(c_0, \dots, c_{m+n}) = h_\phi(c_0, \dots, c_{m-1}, c_{k_1}, \dots, c_{k_{n+1}})$$

dove  $m \leq k_1 < \dots < k_{n+1}$ .

**Lemma 2.18.** *Sia  $T$  un carattere che soddisfa le condizioni (II) e (III). Siano  $\alpha < \beta$  ordinali, di cui  $\alpha$  ordinale limite. Poniamo — come nel lemma 2.8.4 —*

$$X' = \{x_\xi^\beta \mid \xi < \alpha\} \subseteq X_\beta, \quad \mathcal{N} = \text{Cl}_{H(\mathcal{M}_\alpha)}(X')$$

Allora — per il suddetto lemma 2.8.4 —  $\mathcal{N} \cong \mathcal{M}_\beta$ . Inoltre vale:

$$\text{On}^{\mathcal{N}} = \text{On}^{\mathcal{M}_\beta} \cap x_\alpha^\beta.$$

*Dimostrazione.* Gli ordinali di  $\mathcal{N}$  devono essere anche ordinali di  $\mathcal{M}_\beta$ . Osserviamo che allora

$$\text{On}^{\mathcal{N}} \subseteq \text{On}^{\mathcal{M}_\beta} \cap x_\alpha^\beta$$

perchè se per assurdo ce ne fosse uno più grande esso sarebbe anche più grande di tutti gli indiscernibili di  $X'$ , in contrasto con (II).

Resta da provare l'inclusione inversa. Sia  $x \in \text{On}^{\mathcal{M}_\beta} \cap x_\alpha^\beta$ . Per costruzione esiste una formula di Skolem tale che  $x = h_\varphi[k_0, \dots, k_n, l_0, \dots, l_m]$ . Abbiamo diviso i parametri in due gruppi: quelli che stanno in  $X'$  (indicati  $k_i$ ) e quelli maggiori (indicati  $l_i$ ). Per (III), gli ultimi  $m$  parametri sono ininfluenti e possono

<sup>5</sup>Nell'originale: *remarkable condition* e *remarkable EM-blueprint*.

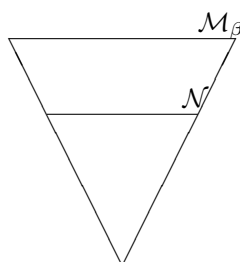
essere scelti arbitrariamente purchè  $> k_n$ : noi li scegliamo minori di  $x_\alpha^\beta$  (esistono perchè esso è ordinale limite), dimostrando così che

$$x = h_\varphi[k_0, \dots, k_{n+m}] \in \text{On}^{\mathcal{N}}.$$

□

**Lemma 2.19.** *Sia  $T$  un carattere che soddisfa (II) e (III). Allora  $\forall \alpha > \omega$  limite  $X_\alpha$  è club in  $\text{On}^{\mathcal{M}_\alpha}$ .*

*Dimostrazione.* Per il lemma 2.16 sappiamo già che  $X_\alpha$  è illimitato. Ora vogliamo dimostrare che se  $\beta < \alpha$  è limite allora  $\sup\{x_\xi^\alpha \mid \xi < \beta\} = x_\beta^\alpha$ .



Essendo  $\beta$  limite, la chiusura di Skolem di  $\{x_\xi^\alpha \mid \xi < \beta\}$  (che chiamo  $\mathcal{N}$ ) è isomorfa a  $\mathcal{M}_\beta$ , e per il lemma 2.16 gli indiscernibili  $\{x_\xi^\alpha \mid \xi < \beta\}$  sono illimitati in  $\text{On}^{\mathcal{N}}$ . Infine applico il lemma 2.18:  $\text{On}^{\mathcal{N}} = \text{On}^{\mathcal{M}_\alpha} \cap x_\beta^\alpha$ , quindi il limite è proprio  $x_\beta^\alpha$ . □

## 2.5 Zero sharp

Il lemma seguente è un relativo miglioramento rispetto al lemma 2.13: dà un'indicazione circa il valore di  $\gamma$ .

**Lemma 2.20.** *Sia  $T$  un carattere che soddisfa (I), (II), (III). Siano  $\omega < \alpha < \beta$  ordinali, di cui  $\alpha$  ordinale limite. Siano  $\mathcal{M}_\alpha$  ed  $\mathcal{M}_\beta$  i modelli previsti dal lemma 2.8, con insiemi di indiscernibili  $X_\alpha$  e  $X_\beta$ . Grazie al lemma 2.13 possiamo scegliere  $\mathcal{M}_\alpha = L_\gamma$  ed  $\mathcal{M}_\beta = L_\delta$ .*

*Siano poi  $X' \subset X_\beta$  e  $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}_\beta$  come nel lemma 2.8.4. Allora:*

$$\mathcal{N} = \mathcal{M}_\alpha = \langle L_{x_\alpha^\beta}, \in, \dots \rangle.$$

In altre parole, se ci limitiamo a studiare i modelli transitivi, gli insiemi  $X_\alpha$  sono 'compatibili': per ogni  $\alpha < \beta$  ordinali limite,  $X_\alpha \subset X_\beta$  e l'unico modello transitivo per  $\alpha$  è  $L_{x_\alpha^\beta}$ .

*Dimostrazione.* Sappiamo già che  $\mathcal{N} \cong \mathcal{M}_\alpha$ . Quindi ci occorre dimostrare che:

1. anche  $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}_\beta$  è classe transitiva, e quindi è un opportuno  $L_\delta \prec L_\gamma$ ;
2.  $\delta = x_\alpha^\beta$ .

Posso ottenere i due risultati contemporaneamente mostrando che  $\text{On}^{\mathcal{N}} = x_{\alpha}^{\beta}$ . Per il lemma 2.18,  $\text{On}^{\mathcal{N}} = \text{On}^{\mathcal{M}_{\beta}} \cap x_{\alpha}^{\beta}$ . Ma il modello  $\mathcal{M}_{\beta}$  è transitivo, quindi  $\text{On}^{\mathcal{M}_{\beta}} \cap x_{\alpha}^{\beta} = x_{\alpha}^{\beta}$ .  $\square$

**Notazione.** Grazie al lemma possiamo definire senza ambiguità

$$I := \bigcup_{\gamma \text{ ordinali limite}} X_{\gamma} \subset \text{On}$$

sottintendendo che stiamo scegliendo sempre e solo i modelli  $\mathcal{M}_{\gamma}$  transitivi.  $I$  è classe di indiscernibili per  $L$ . Indicheremo  $\langle i_{\xi} \mid \xi \in \text{On} \rangle$  la sua enumerazione crescente; per  $\alpha$  limite risulta:

$$\mathcal{M}_{\alpha} = \langle L_{i_{\alpha}}, \in, \dots \rangle$$

con insieme di indiscernibili  $I \cap i_{\alpha}$ .

**Proposizione 2.21.** *Supponiamo esista un carattere  $T$  che soddisfa (I), (II), (III). Allora:*

- (a)  $I$  è club in  $\text{On}$ ;
- (b)  $\forall \xi \in \text{On} (|i_{\xi}| = |\xi| + \aleph_0)$ ;
- (c)  $\forall \lambda > \omega$  cardinale,  $i_{\lambda} = \lambda$ . In particolare  $\lambda \in I$  e  $\mathcal{M}_{\lambda} = L_{\lambda}$ : ogni cardinale non numerabile è un indiscernibile;
- (d)  $T$  è unico, in quanto è  $T = \text{Th}(\langle L_{\aleph_n}, \in, \aleph_{n+1} \rangle_{n \in \omega})$ .

*Dimostrazione.*

- (a) Segue dal lemma 2.19.
- (b) Se  $\xi$  è finito abbiamo già osservato che il modello  $\mathcal{M}_{\xi}$  ha cardinalità  $\omega$ , quindi  $|i_{\xi}| = \omega$ .  
Se  $\xi$  è limite,  $|L_{i_{\xi}}| = |\text{Cl}_{H(L_{i_{\xi}})}(\{i_{\zeta} \mid \zeta < \xi\})| = |\xi| = |\xi| + \omega$  (l'avevamo già osservato per ogni modello  $\mathcal{M}_{\alpha}$ ); d'altra parte  $|L_{i_{\xi}}| = |i_{\xi}|$  quindi segue la tesi.  
Se infine  $\xi$  è successore, sarà incluso tra due ordinali limiti consecutivi  $\xi_1 < \xi < \xi_2$  che hanno stessa cardinalità, e quindi  $|\xi_1| + \omega < |i_{\xi}| < |\xi_2| + \omega \Rightarrow |i_{\xi}| = |\xi| + \omega$ .
- (c) Per (b),  $|i_{\lambda}| = \lambda$ ; ma per (a)  $I$  è club, quindi una successione crescente di  $\lambda$  elementi converge a  $\lambda$ :  $i_{\lambda} = \lambda$ . Ne segue che  $\lambda \in I$ ; e anche che  $\mathcal{M}_{\lambda} = L_{i_{\lambda}} = L_{\lambda}$ .  
Notiamo che però questa argomentazione non vale per  $\lambda = \omega$ , visto che anche tutti i predecessori di  $i_{\omega}$  hanno cardinalità  $\aleph_0$ .
- (d) Sfruttando (c), scegliamo  $\lambda = \aleph_{\omega}$ ,  $\mathcal{M}_{\lambda} = L_{\aleph_{\omega}}$ ; come già osservato ci basta un sottoinsieme numerabile degli indiscernibili di  $\mathcal{M}_{\lambda}$ , e tra questi ci sono ad esempio tutti i cardinali  $\aleph_n$  non numerabili. Dunque  $T$  è la teoria di  $\langle L_{\aleph_{\omega}}, \in, \aleph_{n+1} \rangle_{n \in \omega}$ .

□

**Definizione 2.22.** Chiamiamo  $0^\#$ , ossia **zero sharp**, l'unico carattere (se esiste) che soddisfa (I), (II), (III).

**Definizione 2.23.** Indichiamo impropriamente  $\exists 0^\#$  la proposizione:

'Esiste un carattere che soddisfa (I), (II), (III)'.

**Osservazione 2.24.** L'ipotesi della proposizione 2.21 nonchè del lemma 2.20 è appunto  $\exists 0^\#$ .

**Proposizione 2.25.** ( $\exists 0^\#$ ). Allora:

1.  $\forall \xi < \zeta (L_{i_\xi} \prec L_{i_\zeta})$  non banalmente; in particolare se  $\kappa < \lambda$  sono cardinali,  $L_\kappa \prec L_\lambda$ ;
2.  $\forall \xi (L_{i_\xi} \prec L)$ ; in particolare ciò vale per tutti i cardinali non numerabili;
3.  $L \prec L$  non banalmente.
4. Ogni enunciato è assoluto tra  $L$  ed  $L_{\omega_1}$ . Ossia, per ogni enunciato  $\sigma$ ,

$$L \models \sigma \iff L_{\omega_1} \models \sigma$$

5.  $I$  è l'unico club in  $\text{On}$  la cui chiusura di Skolem in  $L$  sia tutto  $L$ .
6.  $V \neq L$ ;
7.  $\forall \xi \in \text{On} (i_\xi \text{ è totalmente indescrivibile})^L$ ;
8.  $\forall x \in L$  infinito,  $|\mathcal{P}(x)^L| = |x|$  (estende la prop. 2.14);

Notiamo l'importanza del punto 4: per il teorema di Tarski presa una  $\varphi \in \text{Form}$  non esiste una formula  $V \models \varphi$  che ne definisca la verità. Viceversa la formula

$$L_{\omega_1} \models \varphi$$

è lecita, perchè  $L_{\omega_1}$  è un insieme. Abbiamo trovato una formula che esprime la verità per formule di  $L$ .

Notiamo però ancora che tale formula *non* è definibile in  $L$ : perchè si basa sull'ordinale  $\omega_1$  che non è ivi definibile. E questo è in accordo col fatto che il teorema di Tarski è ancora valido in  $L$ .

*Dimostrazione.*

1. Se  $\xi$  e  $\zeta$  sono ordinali limite, per il lemma 2.20 questo risultato equivale a dire  $\mathcal{M}_\xi \prec \mathcal{M}_\zeta$ , che sappiamo essere vero. Nel lemma 2.8 abbiamo anche osservato che esiste una siffatta immersione non banale.

Se invece non sono limiti, per il criterio di Tarski–Vaught occorre dimostrare che ogni formula esistenziale  $\exists x \psi(x, \vec{y})$  a parametri in  $L_{i_\xi}$  soddisfatta in  $L_{i_\zeta}$  dev'essere soddisfatta anche in  $L_{i_\xi}$ ; procediamo per induzione

sulla complessità di  $\psi$ . Fisso dei parametri  $\vec{a} \in L_{i_\xi}$ ; in  $L_{i_\zeta}$  possiamo trovare un testimone  $b$  tale che

$$L_{i_\zeta} \models \psi(b, \vec{a})$$

Ma tale radice  $b$  può essere espressa in termini di indiscernibili:

$$\exists \zeta_1 < \dots < \zeta_k < \zeta \text{ tali che } b = h_\rho(i_{\zeta_1}, \dots, i_{\zeta_k})$$

A questo punto:

$$\begin{aligned} L_{i_\zeta} &\models \psi(h_\rho(i_{\zeta_1}, \dots, i_{\zeta_k}), \vec{a}) \\ L_{i_\zeta} &\models \psi(h_\rho(i_{\xi_1}, \dots, i_{\xi_k}), \vec{a}) \quad \forall \xi_1 < \dots < \xi_k < \xi \quad \text{per indiscernibilità} \\ L_{i_\xi} &\models \psi(h_\rho(i_{\xi_1}, \dots, i_{\xi_k}), \vec{a}) \quad \text{per ipotesi induttiva} \\ L_{i_\xi} &\models \exists x \psi(x, \vec{a}) \end{aligned}$$

2. Iniziamo a dimostrarlo per i cardinali. Per la proposizione 2.21,  $L$  è il limite diretto delle strutture  $L_\lambda$ , quindi in particolare ognuna di esse si immerge elementarmente in  $L$ :  $L_\lambda \prec L$ .

Per quanto riguarda gli altri indiscernibili,  $L_{i_\xi} \prec L_\lambda \prec L$ .

3. Presa un'iniezione  $r : I \rightarrow I$  che rispetti l'ordinamento e che non sia l'identità, questa si estende ad un'immersione elementare:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{r} : & L & \longrightarrow L \\ & h_\varphi(i_{\xi_1}, \dots, i_{\xi_n}) & \mapsto h_\varphi(r(i_{\xi_1}), \dots, r(i_{\xi_n})) \end{array}$$

È evidente che essa è non banale; d'ora per dimostrato che è anche elementare (cfr. lemma 2.8).

4. Corollario del punto 2: vale per tutti i cardinali non numerabili, in particolare vale per il più piccolo di essi  $\omega_1$ .
5. Già sappiamo che  $I$  osserva le richieste; resta da vedere che è unico.

Sia  $C$  un altro club con tale proprietà.  $C \cap I$  è infinito (è un club) e quindi  $C$  ed  $I$  definiscono lo stesso carattere  $T$ .

Tra  $C$  ed  $I$  esiste un isomorfismo (inteso come biiezione crescente tra le due classi proprie di ordinali); lo chiamo  $r : C \xrightarrow{\sim} I$  e lo estendo ad un nuovo isomorfismo  $\tilde{r} : L \xrightarrow{\sim} L$  come nel punto 3. Ma l'unico isomorfismo siffatto è l'identità, e in particolare  $C = I$ .

6. Applicare la proposizione 2.14 ricordando che  $0^\#$  soddisfa la condizione (I).
7. Per indiscernibilità basta dimostrarlo per  $\xi = 0$ .

Scelgo  $r : I \rightarrow I$  crescente con  $r(i_0) > i_0$ ; poi la estendo a  $\tilde{r} : L \prec L$  come descritta nel punto 3.  $\tilde{r}$  ha punto critico  $i_0$ . Infatti per ogni elemento precedente  $\delta = h_\rho(i_{\xi_1}, \dots, i_{\xi_n}) < i_0$  risulta per (III)

$$r(\delta) = h_\rho(r(i_{\xi_1}), \dots, r(i_{\xi_n})) = h_\rho(i_{\xi_1}, \dots, i_{\xi_n}) = \delta$$

Ora, se  $\sigma$  è un enunciato e  $R \subseteq V_{i_0} \cap L$  è una relazione unaria,

$$L \models (\langle V_{i_0}, \in, R \rangle \models \sigma)$$

$$L \models \exists \alpha < \tilde{h}(i_0) (\langle V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha \rangle \models \sigma) \quad (\text{basta scegliere } \alpha = i_0)$$

$$L \models \exists \alpha < i_0 (\langle V_\alpha, \in, R \cap V_\alpha \rangle \models \sigma)$$

$$L \models (i_0 \text{ è totalmente indescrivibile})$$

8. Sia  $x \in L$  infinito,  $\kappa = |x| \geq \omega$ . Grazie al punto precedente tutti i cardinali non numerabili — fra cui  $\kappa^+$  — sono totalmente indescrivibili in  $L$ . Per il teorema 1.22 essi sono anche inaccessibili secondo  $L$ , il che implica ad esempio che  $2^\kappa < \kappa^+$ . Quindi, sempre in  $L$ ,

$$\kappa \leq 2^\kappa \quad \wedge \quad 2^\kappa < \kappa^+ \quad \Rightarrow \quad 2^\kappa = \kappa$$

$$\text{e } |\mathcal{P}(x)| = |x|.$$

□

**Corollario 2.26.**  $\exists 0^\#$  è assioma indipendente da ZFC.

*Dimostrazione.* Infatti implica  $V \neq L$ , proposizione che è notoriamente indipendente da ZFC. □

Per dimostrare il seguente risultato si veda Silver [9]:

**Proposizione 2.27** (Silver).  $0^\#$  esiste sse un  $L_\gamma$  ammette un insieme non numerabile di indiscernibili.

## 2.6 Due teoremi fondamentali

Enunciamo ora due teoremi che riassumono molti dei risultati riguardanti  $0^\#$ .

**Proposizione 2.28** (Solovay, Silver).  $0^\# \notin L$ .

Tale proposizione verrà dimostrata nel corso del capitolo 4.

**Teorema 2.29** (Kunen, Jensen, Martin, Harrington). *Sono equivalenti:*

1.  $\exists 0^\#$ ;
2.  $L \prec L$  non banalmente;
3.  $\text{Det}(\Pi_1^1)$ ;
4.  $\exists X \subseteq \text{On} (|X| > \omega \wedge \forall Y (X \subseteq Y \wedge |X| = |Y| \rightarrow Y \notin L))$

L'ultimo enunciato viene generalmente formulato reciprocamente:

$$\nexists 0^\# \Leftrightarrow \forall X \subseteq \text{On} (|X| > \omega \Rightarrow \exists Y \in L (|Y| = |X|))$$

e prende il nome di *Teorema del ricoprimento*<sup>6</sup>.

Dimostriamo nel capitolo 3 l'equivalenza tra i primi due enunciati; nel capitolo 5 chiariremo il significato di  $\text{Det}(\Pi_1^1)$  ('tutti i giochi  $\Pi_1^1$  sono determinati') ma dimostriamo solo l'implicazione  $\exists 0^\# \Rightarrow \text{Det}(\Pi_1^1)$ .

<sup>6</sup>Nell'originale: *Covering Theorem*

# Capitolo 3

## $L \prec L$

Questo capitolo sarà dedicato alla dimostrazione del teorema 3.44. Per farlo saranno necessari diversi strumenti, in particolare gli ultrafiltri normali e le ultrapotenze per ultrafiltri normali.

### 3.1 Ultrafiltri normali

**Definizione 3.1.** Un filtro  $F$  su un insieme  $S$  è  $F \subseteq \mathcal{P}(S)$  tale che

1. Per ogni  $A, B \in F$ ,  $A \cap B \in F$ .
2. Per ogni  $A \in F$ ,  $B \in \mathcal{P}(S)$ , se  $B \supseteq A$  allora  $B \in F$ .
3.  $\emptyset \notin F$ , ossia anche  $F \neq \mathcal{P}(S)$ .

Se invece  $F$  è filtro su  $\alpha \in \text{On}$  facciamo anche una richiesta aggiuntiva:

**Definizione 3.2.** Un filtro  $F$  su un ordinale  $\alpha$  è  $F \subseteq \mathcal{P}(\alpha)$  tale che

1. Per ogni  $A, B \in F$ ,  $A \cap B \in F$ .
2. Per ogni  $A \in F$ ,  $B \in \mathcal{P}(\alpha)$ , se  $B \supseteq A$  allora  $B \in F$ .
3.  $\emptyset \notin F$ , ossia anche  $F \neq \mathcal{P}(\alpha)$ .
4. Per ogni  $\gamma < \alpha$ ,  $F$  contiene il segmento finale  $[\gamma, \alpha[$ .

Stante questa convenzione, per un filtro  $F$  su  $\alpha$  seguono immediatamente alcune proprietà:

1. Ogni elemento del filtro è illimitato in  $\alpha$ ;
2. Il filtro non contiene singoletti e non può essere principale;
3. Il filtro non è vuoto.

Riscriviamo la seguente:

**Definizione 3.3.** Sia  $\kappa$  un cardinale; un insieme  $C \subseteq \kappa$  è **club** (closed unbound-  
ed) se è illimitato in  $\kappa$  ed è chiuso nella topologia ordinale di  $\kappa$ ; per  $\kappa$  regolare  
i club sono base di un filtro che chiameremo filtro dei club ed indicheremo  $C_\kappa$ .

**Definizione 3.4.** Se  $F$  è filtro su  $S$ , un sottoinsieme  $X \subseteq S$  è  $F$ -stazionario se interseca tutti gli elementi di  $F$ ; un sottoinsieme  $X \subseteq \kappa$  è **stazionario** se è  $C_\kappa$ -stazionario, cioè interseca ogni club di  $\kappa$ .

**Lemma 3.5.**  $X$  è  $F$ -stazionario sse il suo complementare  $\overline{X}$  non sta nel filtro.

*Dimostrazione.* Se  $X$  è  $F$ -stazionario,  $\forall Z \in F (Z \cap X \neq \emptyset)$ ; e quindi  $\overline{X} \notin F$ , perchè altrimenti  $\overline{X}$  contraddirebbe questa proprietà.

Se viceversa  $X$  non è  $F$ -stazionario,  $\exists Z \in F (Z \cap X = \emptyset)$ ; allora  $\overline{X} \supseteq Z$  e dunque  $\overline{X} \in F$ .  $\square$

**Osservazione 3.6.** Sia  $U$  ultrafiltro.  $X$  è  $U$ -stazionario sse  $X \in U$ .

**Definizione 3.7.** Una funzione  $f : X \subseteq \text{On} \rightarrow \text{On}$  è **regressiva** se per ogni  $\alpha \neq 0$  vale  $f(\alpha) < \alpha$ .

Ricordiamo il seguente:

**Lemma 3.8** (di Fodor). Per ogni  $X \subseteq \kappa$  stazionario e per ogni  $f \in {}^X\kappa$  regressiva esiste  $\alpha < \kappa$  tale che  $f^{-1}(\{\alpha\}) \subseteq \kappa$  è stazionario.

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che per ogni  $\alpha < \kappa$   $f^{-1}(\{\alpha\})$  non sia stazionario. Allora per ogni  $\alpha < \kappa$  possiamo scegliere un club  $C_\alpha$  tale che  $C_\alpha \cap f^{-1}(\{\alpha\}) = \emptyset$ . Definiamo

$$C := \Delta C_\alpha;$$

esso è ancora club (dò per noto questo fatto). Dimostriamo che  $C$  non interseca  $X$ . Infatti:

$$\begin{aligned} \gamma \in C &\Rightarrow \forall \xi < \gamma (\gamma \in C_\xi) && \text{per definizione di } C \\ &\Rightarrow \forall \xi < \gamma (\gamma \notin f^{-1}(\{\xi\})) && \text{per definizione di } C_\xi \\ &\Rightarrow \forall \xi < \gamma (f(\gamma) \neq \xi) \\ &\Rightarrow f(\gamma) \geq \gamma \\ &\Rightarrow \gamma \notin X && \text{perchè } f \text{ regressiva su } X. \end{aligned}$$

Questo è assurdo perchè lo stazionario  $X$  deve intersecare ogni club, fra cui  $C$ .  $\square$

**Definizione 3.9.** Diciamo che un filtro su  $\kappa$  è  $\kappa$ -**completo** se per ogni scelta di  $\gamma < \kappa$  elementi  $X_\alpha$  del filtro la loro intersezione  $\bigcap_{\alpha < \gamma} X_\alpha$  sta ancora nel filtro.

**Lemma 3.10.** Sia  $U$  ultrafiltro su  $\kappa$ . Sono equivalenti:

1.  $U$  è  $\kappa$ -completo;
2. per ogni famiglia  $\langle Y_\alpha \mid \alpha < \gamma \rangle$  di  $\gamma < \kappa$  elementi  $Y_\alpha \subseteq \kappa$ , se  $\bigcup Y_\alpha \in U$  allora  $\exists \alpha < \gamma (Y_\alpha \in U)$ .

*Dimostrazione.*

2.  $\Rightarrow$  1.) Fissato  $\gamma < \kappa$ , prendiamo una famiglia  $\langle X_\alpha \in U \mid \alpha < \gamma \rangle$ . Per assurdo  $\bigcap_\alpha X_\alpha \notin U$ . Ma allora, essendo  $U$  ultrafiltro,  $\kappa \setminus \bigcap_\alpha X_\alpha \in U$ ; e questo insieme è  $\bigcup_\alpha (\kappa \setminus X_\alpha)$ . Per ipotesi, essendo l'unione nel filtro allora anche uno degli insiemi  $\kappa \setminus X_\gamma$  sta in  $U$ ; e tuttavia  $X_\gamma \in U$ , il che è assurdo.

1.  $\Rightarrow$  2.) Fissato  $\gamma < \kappa$ , prendiamo una famiglia  $\langle Y_\alpha \in \mathcal{P}(\kappa) \mid \alpha < \gamma \rangle$ . Ipotizziamo ora che  $\bigcup_\alpha Y_\alpha \in U$ ; dobbiamo concludere che uno degli  $Y_\alpha$  sta nel filtro. Vale

$$\bigcup_\alpha Y_\alpha = \kappa \setminus \bigcap_\alpha (\kappa \setminus Y_\alpha).$$

Allora  $\bigcap_\alpha (\kappa \setminus Y_\alpha) \notin U$  perchè  $U$  è ultrafiltro. Quindi  $\exists \beta ((\kappa \setminus Y_\beta) \notin U)$ : altrimenti, per  $\kappa$ -completezza, dovrebbe valere  $\bigcap_\alpha (\kappa \setminus Y_\alpha) \in U$ . Ed infine, essendo  $U$  ultrafiltro, concludiamo che  $Y_\beta \in U$ .

□

**Corollario 3.11.** *Sia  $U$  ultrafiltro  $\kappa$ -completo su  $\kappa$ . Ogni funzione  $f \in {}^\kappa \kappa$  generalmente limitata (cioè tale che  $\{\xi < \kappa \mid f(\xi) < \beta\} \in U$ ) è generalmente costante (cioè tale che  $\{\xi < \kappa \mid f(\xi) = \alpha\} \in U$ ).*

*Dimostrazione.* Basta applicare il lemma prendendo  $Y_\alpha = \{\xi < \kappa \mid f(\xi) = \alpha\}$  per  $\alpha < \beta$ . □

**Osservazione 3.12.** Non esistono filtri  $\kappa^+$ -completi su  $\kappa$ .

*Dimostrazione.* Altrimenti l'elemento  $\bigcap_{\alpha < \kappa} [\alpha, \kappa[ = \emptyset$  starebbe nel filtro. □

Notiamo che è essenziale la convenzione fatta secondo cui gli ultrafiltri non sono principali: ogni ultrafiltro principale sarebbe addirittura  $\lambda$ -completo per ogni  $\lambda \in \text{Card}$ .

**Definizione 3.13.** Sia  $\kappa$  un cardinale. Se esiste un ultrafiltro su  $\kappa$   $\kappa$ -completo  $\kappa$  è detto **misurabile**.

Un tale ultrafiltro fornisce infatti una misura  $\kappa$ -additiva non principale su  $\mathcal{P}(\kappa)$  in  $\{0, 1\}$ .

Inoltre si dimostra che se esiste una misura non principale su un cardinale  $\lambda$  allora ne esiste anche una  $\lambda$ -additiva, e da questa si può costruire l'ultrafiltro degli insiemi di misura 1: quindi  $\lambda$  è misurabile.

**Definizione 3.14.** Diciamo che un filtro su  $\kappa$  è **normale** se per ogni scelta di  $\kappa$  elementi  $X_\alpha$  del filtro la loro intersezione diagonale

$$\Delta_{\alpha < \kappa} X_\alpha := \{\xi < \kappa \mid \forall \alpha < \xi (\xi \in X_\alpha)\}$$

sta ancora nel filtro.

La normalità su  $\kappa$  è un'indebolimento della  $\kappa^+$ -completezza. Grazie alla convenzione sui filtri adottata:

**Lemma 3.15.** *Un filtro normale su  $\kappa$  è anche  $\kappa$ -completo.*

*Dimostrazione.* Sia  $F$  un filtro normale su  $\kappa$ ,  $\gamma < \kappa$  un ordinale. Presa una famiglia  $\langle X_\alpha \mid \alpha < \gamma \rangle \in {}^\gamma F$ , vogliamo dimostrare che la sua intersezione sta nel filtro. Definiamo

$$Y_\alpha = \begin{cases} X_\alpha & \text{se } \alpha < \gamma \\ \kappa & \text{se } \gamma \leq \alpha < \kappa \end{cases}$$

Per la normalità,  $\Delta_\alpha Y_\alpha \in F$ ; sviluppiamo la definizione di questo insieme:

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha Y_\alpha &= \left\{ \xi < \kappa \mid \xi \in \bigcap_{\beta < \xi} Y_\beta \right\} \\ &= \left\{ \xi < \gamma \mid \xi \in \bigcap_{\beta < \xi} X_\beta \right\} \cup \left\{ \gamma \leq \xi < \kappa \mid \xi \in \bigcap_{\beta < \gamma} X_\beta \right\} \\ &= \Delta_\alpha X_\alpha \cup \left( [\gamma, \kappa[ \cap \bigcap_\alpha X_\alpha \right). \end{aligned}$$

e poi

$$t := [\gamma, \kappa[ \cap \Delta_\alpha Y_\alpha = \left( [\gamma, \kappa[ \cap \bigcap_\alpha X_\alpha \right).$$

Grazie alla convenzione secondo  $[\gamma, \kappa[ \in F$ , anche l'elemento  $t$  sta nel filtro; ma allora anche  $\bigcap_\alpha X_\alpha \supseteq t$  deve stare in  $F$ .  $\square$

**Lemma 3.16.** *Se esiste un filtro  $\kappa$ -completo su  $\kappa$  allora  $\kappa$  deve essere regolare. Se esiste un filtro normale su  $\kappa$  allora  $\kappa$  è regolare non numerabile.*

*Dimostrazione.* Se  $\kappa = \omega$  basta scegliere come controesempio la successione  $\langle X_n \mid n \in \omega \rangle$  con  $X_n = [n + 2, \omega[$ : l'intersezione diagonale è vuota.

Analogamente se  $\kappa$  fosse singolare con cofinalità  $\lambda < \kappa$ , esisterebbe una successione cofinale  $\langle x_\alpha \mid \alpha \in \lambda \rangle$  in  $\kappa$ , quindi la famiglia  $\{[x_\alpha, \kappa[ \mid \alpha \in \lambda\}$  avrebbe intersezione vuota. Il filtro non potrebbe essere  $\kappa$ -completo e dunque neanche normale.  $\square$

La proposizione seguente migliora il 3.16, ma la sua dimostrazione è al di là degli scopi della presente tesi:

**Proposizione 3.17** (Ulam; Tarski). *Se  $\kappa$  è misurabile allora è anche inaccessibile.*

Rimandiamo a Kanamori [1, 2.8] per una dimostrazione.

**Lemma 3.18** (di Fodor generalizzato). *Un filtro  $F$  su  $\kappa$  è normale sse per ogni  $X \subseteq \kappa$   $F$ -stazionario e per ogni  $f \in {}^X \kappa$  regressiva esiste  $\alpha < \kappa$  tale che  $f^{-1}(\{\alpha\}) \subseteq \kappa$  è  $F$ -stazionario.*

*Dimostrazione.*

$\Rightarrow$ ) Sia  $F$  un filtro normale su  $\kappa$ ,  $X$  un insieme  $F$ -stazionario e  $f \in {}^X\kappa$  una funzione regressiva. Per assurdo ogni insieme  $f^{-1}(\{\alpha\})$  sia non  $F$ -stazionario; il che significa che ogni  $\kappa \setminus f^{-1}(\{\alpha\})$  sta nel filtro. Per normalità anche l'intersezione diagonale sta nel filtro:

$$\Delta_{\alpha < \kappa}(\kappa \setminus f^{-1}(\{\alpha\})) \in F$$

ed essendo  $X$   $F$ -stazionario,

$$X \cap \Delta_{\alpha < \kappa}(\kappa \setminus f^{-1}(\{\alpha\})) \neq \emptyset.$$

Tuttavia questa intersezione è vuota: per ogni  $\beta \in X$ , chiamata  $\alpha = f(\beta)$ , allora  $\alpha < \beta$  perchè la funzione è regressiva; quindi

$$\begin{aligned} \beta &\in f^{-1}(\{\alpha\}) \\ \beta &\notin \kappa \setminus f^{-1}(\{\alpha\}) \\ \beta &\notin \Delta_{\alpha < \kappa}(\kappa \setminus f^{-1}(\{\alpha\})). \end{aligned}$$

Siamo così pervenuti ad un assurdo.

$\Leftarrow$ ) Ora vogliamo dimostrare che un filtro  $F$  che goda della proprietà enunciata è normale. Fissata  $\langle X_\alpha \mid \alpha \in \kappa \rangle \in {}^\kappa F$ , per assurdo  $\Delta_{\alpha < \kappa} X_\alpha \notin F$ . Ne segue che  $X := \kappa \setminus \Delta_{\alpha < \kappa} X_\alpha$  è  $F$ -stazionario.

Definisco  $f : X \rightarrow \kappa$ ,  $f(\xi) = \min\{\alpha \mid \xi \notin X_\alpha\}$ . Essa è regressiva:

$$\xi \in X \Rightarrow \xi \notin \Delta_{\alpha < \kappa} X_\alpha \Rightarrow \exists \alpha < \xi (\xi \notin X_\alpha).$$

Allora posso applicare l'ipotesi,

$$\exists \alpha < \kappa \ f^{-1}(\{\alpha\}) \text{ è } F\text{-stazionario.}$$

Significa che per ogni  $Z \in F (Z \cap f^{-1}(\{\alpha\}) \neq \emptyset)$ ; ma questo è assurdo essendo per costruzione  $X_\alpha \cap f^{-1}(\{\alpha\}) = \emptyset$ .

□

**Corollario 3.19.** *Il filtro dei club  $C_\kappa$  è normale; ogni altro filtro normale  $F$  su  $\kappa$  estende  $C_\kappa$ .*

*Dimostrazione.* Il lemma di Fodor dice che  $C_\kappa$  soddisfa il criterio, e quindi è normale.

Dimostriamo quindi il secondo enunciato; sia  $F$  un filtro normale e per assurdo esista un club  $C \notin F$ . Il suo complementare  $\bar{C} := \kappa \setminus C$  è  $F$ -stazionario. Definisco la funzione

$$\begin{aligned} f : \bar{C} &\rightarrow \kappa \\ \xi &\mapsto \sup(C \cap \xi) \end{aligned}$$

che è regressiva, quindi per il teorema precedente esiste  $\alpha \in \kappa$  tale che  $f^{-1}(\{\alpha\})$  è  $F$ -stazionario. E questo è assurdo, perchè ogni  $f^{-1}(\{\alpha\})$  è limitato. □

Ci sarà utile il seguente teorema sulle colorazioni, per la dimostrazione del quale rimandiamo a Kanamori [1, 7.17]:

**Teorema 3.20** (Rowbottom). *Supponiamo  $\kappa$  misurabile,  $U$  ultrafiltro normale su  $\kappa$ . Allora per ogni colorazione  $f : [\kappa]^{<\omega} \rightarrow \gamma$ , dove  $\gamma < \kappa$ , esiste un insieme  $H \in U$  omogeneo per  $f$ , vale a dire  $f \upharpoonright [H]^{<\omega}$  è costante.*

## 3.2 Ultrapotenze di modelli interni

Si vuole ora generalizzare la costruzione dell'ultrapotenza al caso in cui  $M$  sia **modello interno**, cioè  $\in$ -modello transitivo ad esempio di ZF. Definiremo due costruzioni distinte, ma utilizzeremo effettivamente solo la seconda.

La prima costruzione, che chiameremo **ultrapotenza esterna**, prevede che  $U$  sia un ultrafiltro su  $S \in M$ , non necessariamente elemento di  $M$ . Si tenta quindi di costruire l'ultrapotenza come descritta nella sezione 1.3.4.

Incontriamo subito un problema: un modello interno è una classe propria, quindi in questo caso le classi di equivalenza potrebbero non essere insiemi. L'ostacolo può essere aggirato accettando nelle classi di equivalenza solo le funzioni di rango minimo:

$$[f]_U := \{g : \kappa \rightarrow M \mid f \sim g \wedge \forall h (h \sim g \Rightarrow \text{rank}(h) \geq \text{rank}(g))\}$$

Questo artificio prende il nome di **trucco di Scott**.

$M$  è modello interno, quindi l'ultrapotenza è dotata di una relazione  $E_U$  ereditata dall'inclusione  $\in \upharpoonright M$ . Grazie al teorema di Los e al suo corollario,  $M$  si immerge elementarmente nell'ultrapotenza, che quindi è modello di ZF.

La seconda costruzione prende invece il nome di **ultrapotenza interna**; l'ultrapotenza questa volta non è effettuata dal punto di vista dell'universo  $V$  bensì del modello  $M$ . Non si richiede che  $U \in M$  nè che  $U$  sia un ultrafiltro su  $S$ , bensì che

$$\langle M, \in, U \rangle \models \ulcorner U \text{ è ultrafiltro su } S \urcorner$$

Per asserzioni come questa è necessario estendere il linguaggio da LST a  $\mathcal{L}' = \text{LST} \cup \{\dot{U}\}$ :

$$\langle M, \in, U \rangle \models \ulcorner \dot{U}(x) \urcorner \quad \text{sse} \quad x \in U$$

Anzichè accettare tutte le funzioni  $f \in {}^S M$ , possiamo scegliere solo quelle *conosciute da  $M$* :  $f \in {}^S M \cap M$ . In questo modo risulterà  $M \supseteq {}^S M/U$ .

Anche in questo caso è necessario ricorrere al trucco di Scott, effettuato però dall'interno del modello  $M$ , ed anche in questo caso l'ultrapotenza è dotata di una relazione  $E_U$  corrispondente al simbolo  $\in$  ereditata da  $M$ .

Consideriamo infine la struttura ultrapotenza consueta congiuntamente alla relazione  $E_U$ :

$$\text{Ult}(M, U) := \langle {}^S M/U, E_U \rangle$$

Questo simbolo indica per noi l'ultrapotenza interna; altri autori distinguono i simboli  $\text{Ult}(M, U)$  per la potenza esterna e  $\text{Ult}^M(M, U)$  per quella interna.

Naturalmente se  $M = V$  le due costruzioni coincidono.

Proseguiamo ora con alcuni teoremi relativi alle ultrapotenze, tratti da [1, §5].

Anzitutto vale per le ultrapotenze un teorema analogo a quello di Los:

**Proposizione 3.21.**

$$\text{Ult}(V, U) \models \varphi(\overrightarrow{[f]_U}) \quad \Leftrightarrow \quad \{s \in S \mid \varphi(\overrightarrow{f(s)})\} \in U$$

Si può dimostrare che  $E_U$  è regolare ed estensionale, ma in generale non che è ben fondata:

**Proposizione 3.22.** *Se  $U \in M$  oppure se  $U$  è  $\omega_1$ -completo, l'ultrapotenza è ben fondata.*

**Proposizione 3.23.** *Consideriamo l'ultrapotenza  $\text{Ult}(V, U)$ .  
 $E_U$  è ben fondata sse  $U$  è  $\omega_1$ -completo.*

*Dimostrazione.*

$\Leftarrow$ ) Sia  $U$  ultrafiltro  $\omega_1$ -completo. Supponiamo per assurdo  $E_U$  mal fondata, cioè esistano  $\omega$  funzioni  $f_n$  tali che  $[f_{n+1}]E_U[f_n]$  per ogni  $n$ . Chiamato

$$X_n := \{a \in S \mid f_{n+1}(a) \in f_n(a)\}$$

dire che  $[f_{n+1}]E_U[f_n]$  equivale a dire  $X_n \in U$ . Per  $\omega_1$ -completezza risulta  $\bigcap_n X_n \in U$ . Scelto  $b \in \bigcap_n X_n$ , per ogni  $n$   $f_{n+1}(b) \in f_n(b)$ ,  $\perp$ .

$\Rightarrow$ ) Siano  $X_n$  degli elementi di  $U$ , ma  $\bigcap_n X_n \notin U$ . Definiamo:

$$g_k : S \longrightarrow \omega$$

$$s \longmapsto \begin{cases} n - k & \text{se } (s \in \bigcap_{m < n} X_m) \wedge n \geq k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Risulta  $[g_{n+1}]E_U[g_n]$  per ogni  $n$ :

$$\{s \in S \mid g_{k+1}(s) \in g_k(s)\} \supseteq \bigcap_{m \leq k} X_m \setminus \bigcap_n X_n \in U$$

e quindi la relazione  $E_U$  è mal fondata,  $\perp$ .

□

In questa situazione — cioè se  $E_U$  è ben fondata — esiste una classe transitiva  $M_U$  isomorfa all'ultrapotenza; e questo è un nuovo modello interno:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad} & \text{Ult}(M, U) \\ & \searrow j & \downarrow \pi \\ & & M_U \end{array}$$

Inoltre conosciamo esplicitamente la funzione  $j$ : come già osservato è

$$j(x) = \pi([c_x]_U)$$

Notiamo che ogni modello transitivo  $M$  conosce la funzione  $c_x$ .

**Notazione.** Indichiamo  $[f] := \pi([f]_U)$ .

**Proposizione 3.24.** *Sia  $U$  un ultrafiltro  $\kappa$ -completo su  $\kappa$  (ossia  $\kappa$  è misurabile); sia inoltre  $j : V \prec M_U \cong \text{Ult}(V, U)$  l'immersione già nota; allora  $\text{crit}(j) = \kappa$ .*

*Dimostrazione.* Dimostriamo anzitutto che se  $\alpha < \kappa$  allora  $j(\alpha) = \alpha$ .

Se così non fosse, chiamo  $\beta < \kappa$  il minimo ordinale per cui  $j(\beta) > \beta$ ;  $j(\beta) = [c_\beta]$  per definizione di  $j$  e d'altra parte  $\beta = [g]$  per una  $g$  opportuna. Per elementarità

$$\beta < j(\beta) \Leftrightarrow [g] < [c_\beta] \Leftrightarrow \{\xi < \kappa \mid g(\xi) < \beta\} \in U.$$

Ogni funzione generalmente limitata è generalmente costante (corollario 3.11):

$$\exists \gamma < \beta \text{ tale che } \{\xi < \kappa \mid g(\xi) = \gamma\} \in U.$$

Ma allora  $\beta = [g] = [c_\gamma] = \gamma < \beta$ , assurdo. Ne segue che  $\text{crit}(j) \geq \kappa$ .

Ora dimostriamo che se  $\alpha < \kappa$  allora  $j(\alpha) < [\text{id}] < j(\kappa)$ , dove con  $\text{id}$  intendiamo la funzione identità ristretta a  $\kappa$ .

$$j(\alpha) < [\text{id}] < j(\kappa) \Leftrightarrow [c_\alpha] < [\text{id}] < [c_\kappa] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{\xi < \kappa \mid \xi > \alpha\} \in U \wedge \{\xi < \kappa \mid \xi < \kappa\} \in U \Leftrightarrow ]\alpha, \kappa[ \in U \wedge \kappa \in U$$

che ovviamente è vero.

A questo punto è facile concludere che  $\kappa \leq [\text{id}] < j(\kappa)$  e quindi  $j(\kappa) > \kappa$ .  $\square$

**Proposizione 3.25.** *Viceversa, se  $j : V \prec M$  allora  $\text{crit}(j)$  è cardinale misurabile.*

*Dimostrazione.* Sia  $\delta := \text{crit}(j)$ ; non sappiamo ancora se è cardinale. Allora un ultrafiltro  $\delta$ -completo su  $\delta$  è:

$$U := \{X \subseteq \delta \mid \delta \in j(X)\}$$

- Se  $X, Y \in U$  allora  $X \cap Y \subseteq \delta$  e  $\delta \in j(X) \cap j(Y) = j(X \cap Y) \Rightarrow X \cap Y \in U$ .
- Se  $X \in U$ ,  $Z \subseteq \delta$ ,  $X \subseteq Z$ , allora  $\delta \in j(X) \subseteq j(Z) \Rightarrow Z \in U$ .
- Il filtro è proprio perchè  $\delta \notin j(\emptyset) = \emptyset$ .
- Vogliamo che  $U$  contenga anche i segmenti finali: e infatti  $j([\alpha, \delta]) = [\alpha, j(\delta)] \ni \delta$ .
- Se  $X \subseteq \delta$  ma  $X \notin U$ , allora  $\delta \notin j(X)$ ; quindi  $\delta \in j(\delta) \setminus j(X) = j(\delta \setminus X)$  e  $\delta \setminus X \in U$ . Questo ci dice che  $U$  è ultrafiltro.
- Resta da dimostrare che l'ultrafiltro è  $\delta$ -completo. Prendiamo una successione  $\chi \in {}^\gamma U$ ,  $\chi(\alpha) = X_\alpha$ , con  $\gamma < \delta$  e  $X_\alpha \in U$ ; vorremmo dimostrare che  $\delta \in j(\bigcap_\alpha X_\alpha)$ .

Osserviamo però che  $\delta \in \bigcap_\alpha j(X_\alpha)$ , ci basterebbe dimostrare che questi due insiemi sono uguali.

Per  $\alpha < \delta$ ,  $j(\alpha) = \alpha$ , quindi

$$X_\alpha = \chi(\alpha) \Rightarrow j(X_\alpha) = j(\chi)(j(\alpha)) \Rightarrow j(\chi(\alpha)) = j(\chi)(\alpha)$$

$$\bigcap_\alpha X_\alpha = \bigcap_\alpha \chi(\alpha) \Rightarrow j\left(\bigcap_\alpha X_\alpha\right) = \bigcap_\alpha j(\chi)(\alpha) = \bigcap_\alpha j(\chi(\alpha)) = \bigcap_\alpha j(X_\alpha).$$

L'esistenza di  $U$  implica che  $\delta$  è regolare (cfr. lemma 3.16), e quindi cardinale.  $\square$

**Proposizione 3.26.** *Se esiste un cardinale misurabile, allora  $V \neq L$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\lambda$  il più piccolo cardinale misurabile,  $U$  il relativo ultrafiltro  $\lambda$ -completo su  $\lambda$ ,  $j : V \prec M \cong \text{Ult}(V, U)$ . Allora

$$M \models \ulcorner j(\lambda) \text{ è il più piccolo cardinale misurabile} \urcorner \quad (1);$$

e inoltre  $j(\lambda) > \lambda$  perchè è il punto critico.

Per assurdo sia ora  $V = L$ . Per elementarità  $M \models \ulcorner V = L \urcorner$  e quindi  $M = L = V$ .

Ne segue che

$$M = V \models \ulcorner \lambda \text{ è il più piccolo cardinale misurabile} \urcorner \quad (2);$$

il che è evidentemente in contrasto con (1).  $\square$

**Lemma 3.27.** *Sia  $U$  ultrafiltro  $\kappa$ -completo su  $\kappa$ , quindi  $\kappa$  misurabile, e  $j : V \prec M \cong \text{Ult}(V, U)$ . Allora*

1.  $V_\kappa^M = V_\kappa$ ,  $V_{\kappa+1}^M = V_{\kappa+1}$ ,  $\kappa^{+M} = \kappa^+$ ;
2.  $2^\kappa \leq (2^\kappa)^M < j(\kappa) < (2^\kappa)^+$ ;
3.  ${}^\kappa M \subseteq M$  ma  $\kappa^+ M \not\subseteq M$ ;
4.  $U \notin M$ . In particolare  $M \neq V$ .

Per la dimostrazione rimandiamo a Kanamori [1, 5.7].

**Lemma 3.28.** *Sia  $U$  ultrafiltro normale su  $\kappa$ . Allora  $\kappa = [f]$  per un'opportuna  $f \in {}^\kappa \kappa$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\kappa = [g]$  con  $g : \kappa \rightarrow V$ ; come si evince dalla dimostrazione della proposizione 3.24,  $\kappa \leq [\text{id}]$ . Equivalentemente:

$$\kappa = [g] \leq [\text{id}] \Leftrightarrow \{\xi < \kappa \mid g(\xi) \leq \xi\} \in U$$

E quindi  $\{\xi < \kappa \mid g(\xi) < \kappa\} \in U$ . A questo punto mi basta scegliere

$$f(\xi) = \begin{cases} g(\xi) & \text{se } \xi < \kappa \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per soddisfare la tesi.  $\square$

**Proposizione 3.29** (Scott, Keiser, Tarski, 1964). *Sia  $U$  ultrafiltro  $\kappa$ -completo su  $\kappa > \omega$ ; allora sono equivalenti:*

(a)  $U$  è ultrafiltro normale;

- (b) Ogni funzione  $f \in {}^\kappa\kappa$  generalmente regressiva (cioè tale che  $\{\xi < \kappa \mid f(\xi) < \xi\} \in U$ ) è generalmente costante (cioè  $\exists \alpha < \kappa \{\xi < \kappa \mid f(\xi) = \alpha\} \in U$ ).
- (c)  $[\text{id}] = \kappa$ , dove con  $\text{id}$  indichiamo la funzione identità su  $\kappa$ .

*Dimostrazione.* Come già osservato, essendo  $U$  ultrafiltro, un insieme  $X$  è  $U$ -stazionario sse  $X \in U$ .

- (a) $\Rightarrow$ (b) Scelta  $f$  generalmente regressiva,  $X := \{\xi < \kappa \mid f(\xi) < \xi\}$ , chiamo  $\tilde{f} := f \upharpoonright X$ . Essa è regressiva su un dominio  $X$  stazionario, quindi applicando il lemma 3.18 trovo  $\alpha < \kappa$  tale che  $\tilde{f}^{-1}(\{\alpha\}) \in U$ .  $f^{-1}(\{\alpha\})$  è più grande di  $\tilde{f}^{-1}(\{\alpha\})$  e dunque sta nel filtro anch'esso.
- (b) $\Rightarrow$ (a) Voglio applicare il lemma 3.18: scelti  $X \in U$ ,  $f \in {}^X\kappa$  regressiva, devo dimostrare che è generalmente costante. La estendo a

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} f(\xi) & \text{se } \xi \in X \\ 0 & \text{se } \xi \in \kappa \setminus X \end{cases}$$

la quale è ancora regressiva, quindi generalmente regressiva, quindi generalmente costante:  $\exists \alpha (\hat{f}^{-1}(\{\alpha\}) \in U)$ . Per  $\alpha \neq 0$  la dimostrazione è completa perchè  $\hat{f}^{-1}(\{\alpha\}) = f^{-1}(\{\alpha\})$ ; invece  $\hat{f}^{-1}(\{0\}) = f^{-1}(\{0\}) \cup (\kappa \setminus X)$ . In questo caso l'unione  $f^{-1}(\{0\}) \cup (\kappa \setminus X)$  sta nell'ultrafiltro ma  $\kappa \setminus X$  no, segue che  $f^{-1}(\{0\}) \in U$ .

- (a)+(b) $\Rightarrow$ (c) Sappiamo già che  $\kappa \leq [\text{id}] < j(\kappa)$  (cfr. dimostrazione del lemma 3.24).

Sia  $\kappa = \pi[f]$ , dove  $f \in {}^\kappa\kappa$  grazie al lemma 3.28.

$$U \ni \{\xi < \kappa \mid f(\xi) \leq \xi\} = \{\xi < \kappa \mid f(\xi) < \xi\} \cup \{\xi < \kappa \mid f(\xi) = \xi\}$$

Se un'unione sta nell'ultrafiltro almeno uno dei due addendi deve starvi; ma il primo insieme a secondo membro non è in  $U$ : altrimenti  $\exists \alpha \{\xi < \kappa \mid f(\xi) = \alpha\} \in U$ , quindi  $\pi[f] = \alpha \neq \kappa$ . Quindi  $\{\xi < \kappa \mid f(\xi) = \xi\} \in U$  e  $[f] = [\text{id}]$ .

- (c) $\Rightarrow$ (b) Fissiamo  $f \in {}^\kappa\kappa$  con  $\{\xi < \kappa \mid f(\xi) < \xi\} \in U$ ; dobbiamo dimostrare che  $f$  è generalmente costante. L'ipotesi implica  $[f] < [\text{id}] = \kappa$ ; segue che esiste  $\alpha \in \kappa$  tale che  $[f] = \alpha = [c_\alpha]$ ; ma allora  $\{\xi < \kappa \mid f(\xi) = \alpha\} \in U$ .

□

**Proposizione 3.30** (Scott, Keisler, Tarski, 1964). *Se  $\kappa$  è misurabile allora esiste un ultrafiltro normale su  $\kappa$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $U$  un ultrafiltro  $\kappa$ -completo su  $\kappa$ , e  $\kappa = \pi[f]$  con  $f \in {}^\kappa\kappa$ ; un ultrafiltro normale sarà

$$W = \{X \subseteq \kappa \mid f^{-1}(X) \in U\}.$$

$W$  eredita da  $U$  la struttura di ultrafiltro  $\kappa$ -completo:

- $X, Y \in W \Rightarrow f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) \in U \Rightarrow X \cap Y \in W$ .
- $X \in W, X \subseteq Z \subseteq \kappa$ . Allora  $U \ni f^{-1}(X) \subseteq f^{-1}(Z) \Rightarrow f^{-1}(Z) \in U \Rightarrow Z \in W$ .
- $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \notin U \Rightarrow \emptyset \notin W$ .
- $f^{-1}([\alpha, \kappa]) = \{\xi \mid f(\xi) \geq \alpha\} \in U$  perchè  $[f] \geq [c_\alpha] \Rightarrow [\alpha, \kappa] \in W$ .
- Per dimostrare che  $W$  è ultrafiltro, prendiamo  $X \subseteq \kappa, X \notin W; f^{-1}(X) \notin U \Rightarrow U \ni \kappa \setminus f^{-1}(X) = f^{-1}(\kappa \setminus X) \in U \Rightarrow \kappa \setminus X \in W$ .
- L'ultrafiltro è  $\kappa$ -completo: se  $\langle X_\alpha \mid \alpha < \gamma \rangle$ , con  $\gamma < \kappa$  e  $X_\alpha \in W$ , allora  $f^{-1}(X_\alpha) \in U$  e  $f^{-1}(\bigcap X_\alpha) = \bigcap f^{-1}(X_\alpha) \in U$  per  $\kappa$ -completezza; dunque  $\bigcap X_\alpha \in W$ .

Per dimostrare che  $W$  è normale usiamo la proposizione precedente. Scelta  $g \in {}^\kappa \kappa$  generalmente regressiva,

$$\begin{aligned}
\{\xi < \kappa \mid g(\xi) < \xi\} \in W &\Leftrightarrow \{\xi < \kappa \mid g(f(\xi)) < f(\xi)\} \in U \\
&\Leftrightarrow [g \circ f] < [f] = \kappa \\
&\Leftrightarrow [g \circ f] = \alpha = [c_\alpha] \\
&\Leftrightarrow \{\xi < \kappa \mid g(f(\xi)) = \alpha\} \in U \\
&\Leftrightarrow \{\xi < \kappa \mid g(\xi) = \alpha\} \in W
\end{aligned}$$

e quindi  $g$  è generalmente costante.  $\square$

**Proposizione 3.31.** *Sia  $U$  ultrafiltro normale su  $\kappa$ ,  $j : V \prec M_U \cong \text{Ult}(V, U)$ . Allora*

$$M_U = \{j(f)(\kappa) \mid f : \kappa \rightarrow V\}$$

*Dimostrazione.* Fissiamo un elemento  $x \in M_U$ ;  $x = [f]$  per un'opportuna  $f : \kappa \rightarrow V$ . Allora

$$j(f)(\kappa) = j(f)([\text{id}]) = [c_f]([\text{id}]) = [f] = x$$

Nel penultimo passaggio abbiamo usato il teorema di Los:

$$\begin{aligned}
[c_f]([\text{id}]) = [g] &\Leftrightarrow \{\xi < \kappa \mid c_f(\xi)(\text{id}(\xi)) = g(\xi)\} \in U \\
&\Leftrightarrow \{\xi < \kappa \mid f(\xi) = g(\xi)\} \in U
\end{aligned}$$

$\square$

**Proposizione 3.32.** *Sia  $j : V \prec M$ ; per la proposizione 3.25,  $\text{crit}(j) = \kappa$  è misurabile e possiamo definire*

$$U = \{X \subseteq \kappa \mid \kappa \in j(X)\}$$

*ultrafiltro  $\kappa$ -completo. Costruiamo*

$$j_U : V \prec M_U \cong \text{Ult}(V, U).$$

*Allora  $\exists k : M_U \prec M$  che fa commutare il diagramma:*

$$k \circ j_U = j.$$

*Se inoltre  $j = j_W$  e  $M = M_W$  per un ultrafiltro normale  $W$ , allora  $U = W$  e  $M_U = M_W$ .*

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{j_U} & M_U \\
 & \searrow j & \downarrow k \\
 & & M
 \end{array}$$

*Dimostrazione.* L'immersione è  $k([f]) := j(f)(\kappa)$ . Commuta:

$$k \circ j_U(x) = k([c_x]) = j(c_x)(\kappa) = j(x)$$

Nell'ultimo passaggio si sfrutta il fatto che l'immagine di una funzione costante è una funzione costante.

Resta da vedere che  $k$  è elementare:

$$\begin{aligned}
 M_U \models \varphi(\overrightarrow{\pi[f]}) &\Leftrightarrow \text{Ult}(V, U) \models \varphi(\overrightarrow{[f]}) \\
 &\Leftrightarrow \{\xi < \kappa \mid \varphi(\overrightarrow{f(\xi)})\} \in U \\
 &\Leftrightarrow \kappa \in j(\{\xi \mid \varphi(\overrightarrow{f(\xi)})\}) \\
 &\Leftrightarrow \kappa \in j(\{\xi \mid M \models \varphi(\overrightarrow{j(f)(\xi)})\}) \\
 &\Leftrightarrow M \models \varphi(\overrightarrow{j(f)(\kappa)}) \\
 &\Leftrightarrow M \models \varphi(\overrightarrow{k([f])})
 \end{aligned}$$

Per la seconda parte del teorema occorre dimostrare che  $U = W$ . Occorre evitare di confondere le classi di equivalenza  $[f]$  secondo  $U$  e secondo  $W$ , quindi utilizziamo la notazione estesa  $\pi_U([f]_U)$  e  $\pi_W([f]_W)$ . Per normalità  $\kappa = \pi_W([\text{id}]_W)$ ; per  $X \subseteq \kappa$ ,

$$\begin{aligned}
 X \in U &\Leftrightarrow \kappa \in j_W(X) \Leftrightarrow \pi_W([\text{id}]_W) \in \pi_W([c_X]_W) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \{\xi < \kappa \mid \xi \in X\} \in W \Leftrightarrow X \in W.
 \end{aligned}$$

□

### 3.3 Ultrapotenze e $M$ -ultrafiltri

Semplifichiamo ulteriormente il tipo di ultrapotenze da studiare. Questo paragrafo è tratto da Kanamori [1, §19].

**Definizione 3.33.** Diciamo che  $U$  è  $M$ -**ultrafitro** su  $\kappa$  se

1.  $\langle M, \in \rangle$  è modello transitivo di  $\text{ZFC}^-$ , cioè ZFC senza l'assioma Potenza;
2.  $\langle M, \in, U \rangle \models \ulcorner U \urcorner$  è ultrafitro normale su  $\kappa^\ulcorner$ ;
3.  $\langle M, U \rangle$  è *weakly amenable*, cioè

$$\forall f \in {}^\kappa M \cap M (\{\xi \in \kappa \mid f(\xi) \in U\} \in M)$$

Ribadiamo che non è richiesto che  $U$  sia ultrafiltro, nè che  $U \in M$ .  
Ricordiamo che  $\langle M, U \rangle$  sarebbe *amenable* se

$$\forall x \in M (U \cap x \in M)$$

se cioè la relazione  $\dot{U}$  è definita in ogni elemento di  $M$ , ma in generale questo è troppo forte (ad esempio in  $L$  non vale) e **3.** implica solo che

$$\forall x \in M (|x| = \kappa^M \Rightarrow U \cap x \in M).$$

Tale implicazione può essere dimostrata prendendo  $f : \kappa \xrightarrow{\sim} x$ ,  $x = f[\kappa]$ .  
Vedremo tra poco perchè la *weak amenability* ci è necessaria.

Vogliamo ora estendere l'ultrapotenza al linguaggio  $\mathcal{L} \cup \{\dot{U}\}$ ; lo scopo di questa operazione sarà chiarito nel prossimo paragrafo. Dobbiamo stabilire quale è il *nuovo* ultrafiltro  $U'$  nell'ultrapotenza. Se seguissimo la definizione tradizionale, dovremmo imporre

$$\langle {}^\kappa M/U, E_U \rangle \models \dot{U}([f]) \quad \text{sse} \quad \{\xi < \kappa \mid \dot{U}(f(\xi))\} \in U$$

ma noi vogliamo che tale costruzione avvenga in  $M$  e quindi

$$\langle {}^\kappa M/U, E_U \rangle \models \dot{U}([f]) \quad \text{sse} \quad \langle M, \in, U \rangle \models \dot{U}(\{\xi < \kappa \mid \dot{U}(f(\xi))\})$$

definizione possibile grazie alla *weak amenability*. Poi

$$U' := \{[f] \mid \dot{U}(\{\xi < \kappa \mid \dot{U}(f(\xi))\})\}$$

e

$$\langle M, \in, U \rangle \prec \langle {}^\kappa M/U, E_U, U' \rangle.$$

Come prima, si presentano due possibilità:  $E_U$  può essere ben fondata nell'ultrapotenza oppure no. Nel primo caso esiste una classe transitiva  $M_U$  ad essa isomorfa:

$$\begin{array}{ccc} \langle M, \in, U \rangle & \longrightarrow & \langle {}^\kappa M/U, E_U, U' \rangle \\ & \searrow j & \downarrow \pi \\ & & \langle M_U, \in, W \rangle \end{array}$$

Il seguente riprende il lemma **3.27**:

**Lemma 3.34.**

1.  $j$  è cofinale;
2. Se  $M$  è insieme,  $|M| = |N|$ ;
3.  $V_\kappa \cap M = V_\kappa \cap N$ ;  $\mathcal{P}(\kappa) \cap M = \mathcal{P}(\kappa) \cap N$ ;  $\kappa^+M = \kappa^+N$ .
4.  $U \notin N$ , quindi in particolare  $N \neq M$ ;
5.  $W$  è  $N$ -ultrafiltro su  $j(\kappa)$ .

Per la sua dimostrazione rimandiamo a Kanamori [1, 19.1].

**Lemma 3.35.** *Siano  $M, N$  modelli interni di  $ZFC^-$ ,  $k : M \prec N$  un'immersione elementare con punto critico  $\kappa$ ,  $\mathcal{P}(\kappa) \cap M = \mathcal{P}(\kappa) \cap N$ . Allora il seguente è  $M$ -ultrafiltro su  $\kappa$ :*

$$U := \{X \in \mathcal{P}(\kappa) \cap M \mid \kappa \in k(X)\}.$$

Notiamo che è un insieme analogo all'ultrafiltro della proposizione 3.25.

*Dimostrazione.* Relativizzando la dimostrazione 3.25 si ottiene che l'ultrafiltro è  $\kappa$ -completo; noi proseguiamo fino a dimostrare che è normale.

- Se  $X, Y \in U$  allora  $X \cap Y \in \mathcal{P}(\kappa)$  e  $X \cap Y \in M$ ; inoltre  $\kappa \in k(X) \cap k(Y) = k(X \cap Y)$ .
- Se  $X \in U$ ,  $Z \in \mathcal{P}(\kappa)^M$ ,  $X \subseteq Z$ , allora  $\kappa \in k(X) \subseteq k(Z)$ .
- Ovviamente  $\kappa \notin k(\emptyset) = \emptyset$ . Il filtro è proprio.
- $k([\alpha, \kappa]) = [\alpha, k(\kappa)] \ni \kappa$  quindi  $[\alpha, \kappa] \in U$ .
- Se  $X \in \mathcal{P}(\kappa)^M$  ma  $X \notin U$ , allora  $\kappa \notin k(X)$ ; quindi  $\kappa \in k(\kappa) \setminus k(X) = k(\kappa \setminus X)$  e  $\kappa \setminus X \in U$ . Questo ci dice che  $U$  è ultrafiltro.
- Dobbiamo dimostrare che l'ultrafiltro è normale secondo  $M$ . Prendiamo una successione  $\langle X_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle \in M$  con  $X_\alpha \in U$ .

L'intersezione diagonale è

$$D := \Delta_{\alpha < \kappa} X_\alpha := \{\xi < \kappa \mid \forall \alpha < \xi (\xi \in X_\alpha)\}.$$

Per costruzione  $D \in M \cap \mathcal{P}(\kappa)$ ; resta da dimostrare che  $\kappa \in k(D)$ . Possiamo vedere l'intersezione diagonale come una funzione:

$$\begin{aligned} M \models D &= \Delta(\langle X_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle) \\ N \models k(D) &= \Delta(k(\langle X_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle)) \end{aligned}$$

Osserviamo che se  $\alpha < \kappa$  allora  $k(\langle X_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle)(\alpha) = k(X_\alpha)$ ; quindi fra l'altro

$$k(\langle X_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle) \supset \langle k(X_\alpha) \mid \alpha < \kappa \rangle.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} &\forall \alpha < \kappa \ \kappa \in k(X_\alpha) \quad \text{perchè stanno in } U \\ \Rightarrow &\forall \alpha < \kappa \ \kappa \in k(\langle X_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle)(\alpha) \quad \text{grazie all'osservazione precedente} \\ \Rightarrow &\kappa \in \Delta(k(\langle X_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle)) \\ \Rightarrow &\kappa \in k(D) \end{aligned}$$

- Dimostriamo la weak amenability. Presa una qualunque successione  $\chi := \langle X_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle \in {}^\kappa M \cap M$ , posto  $Z := \{\xi < \kappa \mid X_\xi \in U\}$  occorre dimostrare che  $Z \in M$ .

Essendo  $\chi \in {}^\kappa M \cap M$ ,  $k(\chi) \in {}^{k(\kappa)} N \cap N$ .

Allora:

$$\begin{aligned} Z &= \{\xi < \kappa \mid X_\xi \in \mathcal{P}(\kappa)^M \wedge \kappa \in k(X_\xi)\} \\ &= \{\xi < \kappa \mid \chi(\xi) \in \mathcal{P}(\kappa)^M \wedge \kappa \in k(\chi)(\xi)\} \\ &= \{\xi < \kappa \mid k(\chi)(\xi) \in \mathcal{P}(\kappa)^N \wedge \kappa \in k(\chi)(\xi)\} \in N \end{aligned}$$

Ma per ipotesi  $\mathcal{P}(\kappa)^M = \mathcal{P}(\kappa)^N$ , quindi questo insieme sta anche in  $M$ .

□

### 3.4 Iterabilità

L'idea ora è quella di iterare la costruzione dell'ultrapotenza di un modello interno, ma non è detto che in generale sia possibile. Per studiare il problema ci limitiamo al caso  $S = \kappa$  cardinale,  $U$   $M$ -ultrafiltro su  $\kappa$ .

Formalizziamo induttivamente questo procedimento. Indichiamo  $\langle M_\alpha, \in, U_\alpha \rangle$  l' $\alpha$ -esima iterata di  $\langle M, \in, U \rangle$ , in cui ogni  $M_\alpha$  è modello interno e ogni  $U_\alpha$  è  $M_\alpha$ -ultrafiltro su un certo  $\kappa_\alpha \in M_\alpha$ . Indichiamo poi  $j_{\alpha\beta} : M_\alpha \prec M_\beta$  le immersioni canoniche.

Il lemma seguente riprende i lemmi 3.27 e 3.34, applicandoli al caso di ultrapotenze iterate:

**Lemma 3.36.** *Supponiamo  $\alpha < \beta < \tau$ .*

1.  $\text{crit}(j_{\alpha\beta}) = \kappa_\alpha$  e  $j_{\alpha\beta}(\kappa_\alpha) = \kappa_\beta$ ;
2. Se  $M$  è insieme,  $|M_\alpha| = |M| \cdot |\alpha|$ ;
3.  $V_{\kappa_\alpha} \cap M_\alpha = V_{\kappa_\beta} \cap M_\beta$ ;  $\mathcal{P}(\kappa_\alpha) \cap M_\alpha = \mathcal{P}(\kappa_\beta) \cap M_\beta$ ;

Per la dimostrazione rimandiamo a Kanamori [1, 19.4].

**Lemma 3.37.** *Sia  $\delta$  un ordinale limite. Sia dato un sistema diretto di strutture*

$$\langle N_\alpha, \in, W_\alpha \mid \alpha < \delta \rangle, \quad \langle j_{\alpha\beta} : N_\alpha \prec N_\beta \mid \alpha \leq \beta \rangle$$

in cui ogni  $W_\alpha$  è  $N_\alpha$ -ultrafiltro su un certo  $\lambda_\alpha \in N_\alpha$ .

Sia inoltre noto che il limite diretto  $\langle D, E, A \rangle$  è ben fondato. Indico  $j_\alpha : N_\alpha \prec D$  le immersioni canoniche e  $\lambda = j_\alpha(\lambda_\alpha)$ .

Allora

1. Esiste un collasso transitivo

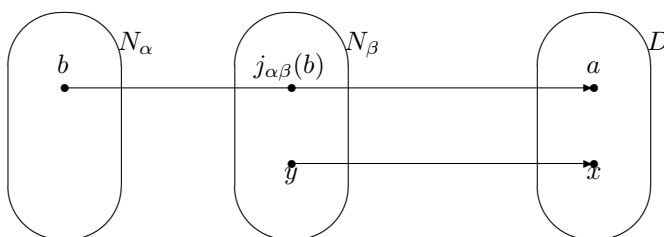
$$\langle N, \in, W \rangle \cong \langle D, E, A \rangle.$$

2.  $W$  è  $N$ -ultrafiltro su  $\lambda$ .

Indichiamo  $j_{\alpha\delta} : N_\alpha \prec N$  le immersioni canoniche.

*Dimostrazione.* Per applicare il Lemma del Collassamento è necessario che  $E$  sia estensionale, e questo è vero perchè vale in ogni  $N_\alpha$ ; ma deve essere anche regolare. Fissato un elemento  $a \in D$ ,  $a = j_\alpha(b)$ , la classe dei suoi predecessori è

$$\{x \in D \mid \exists \beta \exists y (\alpha \leq \beta < \delta \wedge i_\beta(y) = x \wedge y \in j_{\alpha\beta}(b))\}$$



il quale è immagine della seguente funzione:

$$F : \bigcup_{\beta < \delta} \{y \in N_\beta \mid y \in i_{\alpha\beta}(b)\} \rightarrow V$$

$$y \in N_\beta \mapsto i_\beta(y)$$

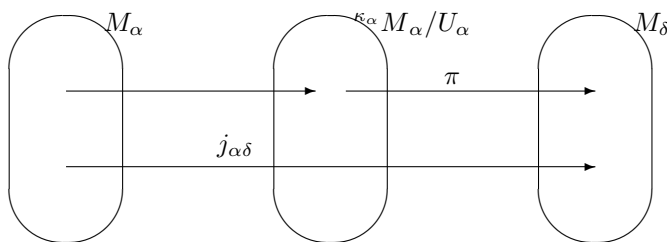
Il dominio di  $F$  è insieme perchè  $\in$  è regolare in ogni  $N_\beta$ , e dunque  $\text{im}(f)$  è insieme per l'Assioma di Rimpiazzamento.

Poichè ogni  $N_\alpha$  soddisfa  $\ulcorner W_\alpha$  è ultrafiltro normale su  $\lambda_\alpha \urcorner$  allora  $N$  soddisfa  $\ulcorner W$  è ultrafiltro normale su  $\lambda \urcorner$ ; occorre solo più dimostrare che è *weakly amenable*.

Presa  $F \in {}^\lambda N \cap N$ ,  $\exists \alpha \exists \bar{F} F = j_{\alpha\delta}(\bar{F})$ . Ma  $\langle N_\alpha, W_\alpha \rangle$  è *weakly amenable*, quindi  $X := \{\xi < \lambda_\alpha \mid \bar{F}(\xi) \in W_\alpha\} \in N_\alpha$  quindi  $j_{\alpha\delta}(X) = \{\xi < \lambda \mid F(\xi) \in W\} \in N$ .  $\square$

Possiamo ora proseguire la costruzione:

- Se  $\delta = \gamma + 1$  è successore, svolgiamo l'ultrapotenza  ${}^{\kappa_\gamma} M_\gamma / U_\gamma$ . Possono succedere due cose:  $E_{U_\gamma}$  è ben fondata oppure no. Se non è ben fondata la costruzione si ferma, e poniamo  $\tau := \delta$ . Viceversa posso prendere il collasso transitivo per definire  $\langle M_\delta, E_\delta, U_\delta \rangle$ .  $U_\delta$  è  $M_\delta$ -ultrafiltro grazie al lemma 3.34.



- Se  $\delta$  è limite prendo il limite diretto delle strutture già costruite. Di nuovo siamo di fronte a due casi: se questo limite diretto non è ben fondato dobbiamo fermarci con  $\tau := \delta$ , viceversa possiamo definire l'iterata  $\delta$ -esima come collasso transitivo.  $U_\delta$  è  $M_\delta$ -ultrafiltro grazie al lemma 3.37.
- Se la costruzione non si è fermata posso porre  $\tau := \text{On}$ .  $\tau$  indica dunque qual è la prima iterata  $M_\tau$  che *non* è stato possibile costruire.

**Proposizione 3.38** (Gaifman, Jansen, Dodd). *Dato un modello  $\langle M, \in, U \rangle$ , sono equivalenti:*

1.  $\tau = \text{On}$ , cioè la struttura è iterabile;
2.  $\tau \geq \omega_1$ ;
3.  $\exists \alpha$  tale che  $U_\alpha$  è **numerabilmente completa**: ogni famiglia numerabile di insiemi in  $U_\alpha$  ha intersezione non vuota.

Il seguente lemma estende il 3.31 al caso di ultrapotenze iterate.

**Lemma 3.39.**  $\alpha < \tau$ .

$$M_\alpha = \{i_{0\alpha}(f)(\kappa_{\gamma_1}, \dots, \kappa_{\gamma_n}) \mid n \in \omega, f \in {}^{[\kappa]^n} M \cap M, \gamma_1 < \dots < \gamma_n < \alpha\}.$$

*Dimostrazione.* Preso  $x \in M_{\alpha+1}$ , per il lemma 3.31 è  $x = i_{\alpha, \alpha+1}(g)(\kappa_\alpha)$  con un'opportuna  $g \in {}^{\kappa_\alpha} M_\alpha \cap M_\alpha$ . Per  $\alpha = 1$  la dimostrazione è completata; procediamo ora per induzione su  $\alpha$ .

Per ipotesi induttiva e  $\alpha$  ordinale successore,  $g = i_{0\alpha}(h)(\kappa_{\gamma_1}, \dots, \kappa_{\gamma_n})$  per un'opportuna  $h \in {}^{[\kappa]^n} M \cap M$ . Giacchè  $h(x)$  è funzione quasi ovunque, possiamo assumere che ogni  $h(x)$  sia funzione. Definiamo

$$\begin{cases} f(\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}) = h(\xi_1, \dots, \xi_n)(\xi_{n+1}) \\ f \in {}^{[\kappa]^{n+1}} M \cap M. \end{cases}$$

Questa è la funzione cercata:

$$\begin{aligned} i_{0, \alpha+1}(f)(\kappa_{\gamma_1}, \dots, \kappa_{\gamma_n}, \kappa_\alpha) &= i_{0, \alpha+1}(h)(\kappa_{\gamma_1}, \dots, \kappa_{\gamma_n})(\kappa_\alpha) \quad \text{perchè } \kappa_\alpha \text{ è punto critico} \\ &= i_{0, \alpha+1}(h(\kappa_{\gamma_1}, \dots, \kappa_{\gamma_n}))(\kappa_\alpha) \\ &= i_{\alpha, \alpha+1}(i_{0, \alpha}(h)(\kappa_{\gamma_1}, \dots, \kappa_{\gamma_n})(\kappa_\alpha)) \\ &= i_{\alpha, \alpha+1}(g)(\kappa_\alpha) \\ &= x \end{aligned}$$

Per  $\alpha = \delta$  ordinale limite la dimostrazione è immediata:  $x \in M_\delta$ , quindi  $x = j_{\beta, \delta}(y) \wedge y = i_{0, \beta}(f)(\kappa_{\gamma_1}, \dots, \kappa_{\gamma_n})$  per parametri opportuni. Quindi  $x = i_{0, \delta}(f)(\kappa_{\gamma_1}, \dots, \kappa_{\gamma_n})$  perchè  $i_{0, \delta}$  ha punto critico  $\kappa_\delta$ .  $\square$

### 3.5 L'ultrafiltro $U^n$

**Definizione 3.40.** Definiamo l'insieme

$$U^n := \{X \in \mathcal{P}([\kappa]^n) \cap M \mid \exists H \in U ([H]^n \subseteq X)\}.$$

Per quanto brutta possa essere la sua scrittura, questo insieme è un ultrafiltro su  $[\kappa]^n$  che discende in maniera naturale da  $U$ . Informalmente, ogni  $H \in U$  è un insieme *grande*; e quindi sarà grande anche  $[H]^n$  e a maggior ragione ogni  $X \supseteq [H]^n$ .

Il seguente lemma rende più rigoroso questo discorso:

**Lemma 3.41.** *Sia  $U$  un ultrafiltro normale su  $\kappa$ . Allora:*

1.  $\langle M, \in, U \rangle \models \ulcorner U^n \text{ è ultrafiltro } \kappa\text{-completo su } [\kappa]^n \urcorner$ .
2. Per  $X \in [\kappa]^{n+1}$ ,

$$X \in U^{n+1} \Leftrightarrow \{s \in [\kappa]^n \mid \{\xi < \kappa \mid s \cup \{\xi\} \in X\} \in U\} \in U^n.$$

3. Per  $X \in [\kappa]^n$ ,  $X \in U^n \Leftrightarrow$

$$\{\xi_1 < \kappa \mid \{\xi_2 < \kappa \mid \dots \{\xi_n < \kappa \mid \{\xi_1, \dots, \xi_n\} \in X\} \in U \dots\} \in U\} \in U.$$

*Dimostrazione.* 1. Dimostriamo che  $\{[H]^n \mid H \in U\}$  è base di un filtro, che per costruzione è  $U^n$ :

- Siano  $x, y \in U^n$ .  $x, y \subseteq \mathcal{P}_n(\kappa) \Rightarrow x \cap y \subseteq \mathcal{P}_n(\kappa)$ ;  $x, y \in M \Rightarrow x \cap y \in M$ ;  $H, G \in U$  con  $\mathcal{P}_n(H) \subseteq x \wedge \mathcal{P}_n(G) \subseteq y \Rightarrow \mathcal{P}_n(H \cap G) = \mathcal{P}_n(H) \cap \mathcal{P}_n(G) \subseteq x \cap y$  con  $H \cap G \in U$ . Quindi  $x \cap y \in U^n$ .
- Il filtro è non banale: se  $\emptyset \in U^n \Rightarrow \exists H \in U \mathcal{P}_n(H) \subseteq \emptyset \Rightarrow \mathcal{P}_n(H) = \emptyset \Rightarrow |H| < n \Rightarrow \perp$  per la convenzione adottata per  $U$ .
- Il filtro è non vuoto, essendoci tutti gli elementi della base.
- Per dimostrare che è ultrafiltro utilizziamo il teorema di Rowbottom 3.20. Sia  $X \notin U^n$ . Indico  $f$  la funzione caratteristica di  $X$ :

$$f : [\kappa]^n \rightarrow \{0, 1\}$$

$$s \mapsto \begin{cases} 0 & \text{se } s \in X \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Grazie al teorema 3.20 trovo un insieme  $H \in U$  tale che  $f \upharpoonright [H]^n$  è costante. Non può essere costantemente 0 altrimenti sarebbe  $[H]^n \subseteq X$  e quindi  $X \in U^n$ ; e allora deve essere costantemente 1 e  $\kappa \setminus X \in U^n$ .

- Per la  $\kappa$ -completezza, prendiamo  $\langle X_\xi \mid \xi < \lambda \rangle \in M$ ,  $\lambda < \kappa$ ,  $X_\xi \in U$ . Dobbiamo dimostrare che  $X := \bigcap_\xi X_\xi$  è elemento di  $U$ .  
 $X_\xi \subseteq \mathcal{P}_n(\kappa) \Rightarrow X \subseteq \mathcal{P}_n(\kappa)$ ;  $X_\xi \in M \Rightarrow X \in M$ ;  
 $\exists H_\xi \in U : \mathcal{P}_n(H_\xi) \subseteq X_\xi \Rightarrow \bigcap_\xi \mathcal{P}_n(H_\xi) = \mathcal{P}_n(\bigcap_\xi H_\xi) \subseteq X$  e infine  $\bigcap_\xi H_\xi \in U$  per  $\kappa$ -completezza.

2. Indico per praticità

$$Z(X) := \{s \in [\kappa]^n \mid \{\xi < \kappa \mid s \cup \{\xi\} \in X\} \in U\}.$$

Definiamo

$$V^{n+1} = \{X \in \mathcal{P}([\kappa]^{n+1}) \cap M \mid Z(X) \in U^n\};$$

dimostriamo che è filtro contenente  $U^{n+1}$ ; ma quest'ultimo è ultrafiltro, quindi devono coincidere ed il teorema è verificato.

Iniziamo dal dimostrare l'inclusione:

$$\begin{aligned} X \in U^{n+1} &\Leftrightarrow \exists H \in U([H]^{n+1} \subseteq X) \\ &\Leftrightarrow \exists H \in U \forall x \in [H]^{n+1} (x \in X) \\ &\Leftrightarrow \exists H \in U \forall s \in [H]^n \forall \xi \in H \setminus s (s \cup \{\xi\} \in X) \quad (1) \end{aligned}$$

e d'altra parte

$$\begin{aligned} Z(X) \in U^n &\Leftrightarrow \exists G \in U([G]^n \subseteq Z(X)) \\ &\Leftrightarrow \exists G \in U \forall t \in [G]^n (\{\xi < \kappa \mid t \cup \{\xi\} \in X\} \in U) \quad (2) \end{aligned}$$

Se vale (1), essendo  $s$  finito e  $H \in U$ ,  $H \setminus s \in U$ . Inoltre  $H \setminus s \subseteq \{\xi < \kappa \mid s \cup \{\xi\} \in X\}$  e quindi (1) $\Rightarrow$ (2) con  $G = H$ ,  $s = t$ . Quindi  $V^{n+1} \supseteq U^{n+1}$ .

Dimostriamo ora che è  $V^{n+1}$  filtro (non è necessario che contenga anche i segmenti finali).

- Se  $X \in V^{n+1}$  e  $Y \supset X$ ,  $Z(X) \in U^n$ ; in tal caso, per ogni  $s$  per cui  $\{\xi < \kappa \mid s \cup \{\xi\} \in X\} \in U$ , si ha  $\{\xi < \kappa \mid s \cup \{\xi\} \in X\} \subseteq \{\xi < \kappa \mid s \cup \{\xi\} \in Y\} \in U$ ; e quindi  $Z(X) \subseteq Z(Y) \in U^n$ .
- Se  $X, Y \in V^{n+1}$ ,  $Z(X), Z(Y) \in U^n$ ; fissato  $s \in Z(X) \cap Z(Y)$ , risulta

$$\{\xi < \kappa \mid s \cup \{\xi\} \in X\} \subseteq \{\xi < \kappa \mid s \cup \{\xi\} \in X \cap Y\} \in U$$

e quindi  $Z(X) \subseteq Z(X \cap Y) \in U^n$ .

- $\emptyset \notin V^{n+1}$ , altrimenti sarebbe  $Z(\emptyset) \in U^n$ , ma tale elemento è in effetti  $\emptyset$  e non può stare in un filtro.

3.

$$\begin{aligned} X &\in U^n \\ \Leftrightarrow \{s \in [\kappa]^{n-1} \mid \{\xi_n < \kappa \mid s \cup \{\xi_n\} \in X\} \in U\} &\in U^{n-1} \\ \Leftrightarrow \{s' \in [\kappa]^{n-2} \mid \{\xi_{n-1} < \kappa \mid \{\xi_n < \kappa \mid s' \cup \{\xi_{n-1}, \xi_n\} \in X\} \in U\} \in U\} &\in U^{n-2} \\ \dots & \\ \Leftrightarrow \{s'' \in [\kappa]^1 \mid \{\xi_2 < \kappa \mid \dots \{\xi_n < \kappa \mid s'' \cup \{\xi_2, \dots, \xi_n\} \in X\} \in U \dots\} \in U\} &\in U^1 \\ \Leftrightarrow \{\xi_1 < \kappa \mid \{\xi_2 < \kappa \mid \dots \{\xi_n < \kappa \mid \{\xi_1, \dots, \xi_n\} \in X\} \in U \dots\} \in U\} &\in U \end{aligned}$$

□

**Lemma 3.42.** *Sia  $U^n$  come sopra. Sia  $\varphi(v_1, \dots, v_n)$  una formula,  $M$  un modello interno,  $x \in M$ ,  $\gamma_1 < \dots < \gamma_n < \alpha < \tau(M)$ . Allora*

$$\langle M_\alpha, \in, U_\alpha \rangle \models \varphi[i_{0\alpha}(x), \kappa_{\gamma_1}, \dots, \kappa_{\gamma_n}]$$

$\Updownarrow$

$$\langle M, \in, U \rangle \models \{\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \in [\kappa]^n \mid \varphi[x, \xi_1, \dots, \xi_n]\} \in U^n$$

*Dimostrazione.* Procediamo per induzione su  $n$ . Il caso  $n = 0$  è immediato essendo  $i_{0\alpha}$  immersione elementare. Per  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned}
& \langle M_\alpha, \in, U_\alpha \rangle \models \varphi[i_{0\alpha}(x), \kappa_{\gamma_1}, \dots, \kappa_{\gamma_n}] \\
\Leftrightarrow & \langle M_{\gamma_{n+1}}, \in, U_{\gamma_{n+1}} \rangle \models \varphi[i_{0, \gamma_{n+1}}(x), \kappa_{\gamma_1}, \dots, \kappa_{\gamma_n}] \\
\Leftrightarrow & \langle M_{\gamma_n}, \in, U_{\gamma_n} \rangle \models \{\xi_n < \kappa \mid \varphi[i_{0, \gamma_n}(x), \kappa_{\gamma_1}, \dots, \kappa_{\gamma_{n-1}}, \xi_n]\} \in U_{\gamma_n} \\
\Leftrightarrow & \langle M_{\gamma_{n-1}}, \in, U_{\gamma_{n-1}} \rangle \models \{\xi_{n-1} < \kappa \mid \{\xi_n < \kappa \mid \varphi[i_{0, \gamma_{n-1}}(x), \kappa_{\gamma_1}, \dots, \kappa_{\gamma_{n-2}}, \\
& \xi_{n-1}, \xi_n]\} \in U\} \in U \\
& \dots \\
\Leftrightarrow & \langle M, \in, U \rangle \models \{\xi_1 < \kappa \mid \dots \{\xi_n < \kappa \mid \varphi[x, \xi_1, \dots, \xi_n]\} \in U \dots\} \in U
\end{aligned}$$

Segue la tesi per il lemma 3.41.  $\square$

Infine il seguente corollario, che lega l'iterabilità e l'esistenza di indiscernibili:

**Corollario 3.43** (Kunen). *Siano  $\varphi(v_0, \dots, v_n)$  una formula,  $x \in M$ ,  $\gamma_1 < \dots < \gamma_n < \alpha < \tau(M)$ ,  $\delta_1 < \dots < \delta_n < \beta < \tau(M)$ . Allora*

$$\begin{aligned}
& \langle M_\alpha, \in, U_\alpha \rangle \models \varphi[i_{0, \alpha}(x), \kappa_{\gamma_1}, \dots, \kappa_{\gamma_n}] \\
& \Updownarrow \\
& \langle M_\beta, \in, U_\beta \rangle \models \varphi[i_{0, \beta}(x), \kappa_{\delta_1}, \dots, \kappa_{\delta_n}]
\end{aligned}$$

In particolare (per  $\alpha = \beta$ ) l'insieme  $\{\kappa_\gamma \mid \gamma < \alpha\}$  è un insieme di indiscernibili per  $\langle M_\alpha, \in, U_\alpha, i_{0, \alpha}(x) \rangle_{x \in M}$ .

*Dimostrazione.* Grazie al lemma 3.42 entrambi i membri equivalgono a

$$\langle M, \in, U \rangle \models \{\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \in [\kappa]^n \mid \varphi(x, \xi_1, \dots, \xi_n)\} \in U^n$$

$\square$

### 3.6 $L \prec L$

**Teorema 3.44** (Kunen). *Sono equivalenti:*

- (a)  $L \prec L$  non banalmente;
- (b) Esistono  $\alpha < \beta$  ed un morfismo elementare  $j : L_\alpha \prec L_\beta$  con punto critico minore di  $|\alpha|$ ;
- (c) C'è un  $L$ -ultrafiltro  $U$  tale che l'ultrapotenza di  $L$  è ben fondata;
- (d) C'è un  $L$ -ultrafiltro  $U$  iterabile;
- (e)  $0^\#$  esiste.

La dimostrazione qui riportata è tratta da Kanamori [1, §21].

*Dimostrazione.*

(d) $\Rightarrow$ (e) Per ipotesi posso iterare  $L$  a piacere; ma il sostegno delle iterate di  $L$  è sempre  $L$ , perchè ciascuna di esse soddisfa  $V = L$ . Applico il corollario 3.43, dunque all' $\alpha$ -esima iterata trovo degli indiscernibili  $\{\kappa_\gamma \mid \gamma < \alpha\}$  per  $L$  che sono indiscernibili anche per ogni  $L_\beta$  con  $\beta > i_\alpha$ . Scegliendo  $\alpha > \omega$  la proposizione di Silver (2.27) mi dice che questo equivale a  $\exists 0^\#$ .

(e) $\Rightarrow$ (a) È già noto, proposizione 2.25.

(a) $\Rightarrow$ (b) Sia  $j : L \prec L$  un'immersione non banale, di punto critico  $\kappa$ . Chiaramente  $j \upharpoonright L_\alpha$  è morfismo elementare per ogni  $\alpha$ . Ma  $j(\kappa) > \kappa$ ; se scelgo  $\alpha$  di cardinalità maggiore di  $\kappa$  e  $\beta = j(\alpha)$  tale morfismo è non banale:

$$j \upharpoonright L_\alpha : L_\alpha \prec L_\beta$$

(b) $\Rightarrow$ (c) Sia  $\kappa < |\alpha|$  il punto critico di  $j$ . Un  $L$ -ultrafiltro che soddisfa la tesi è:

$$U := \{X \in \mathcal{P}(\kappa) \cap L_\alpha \mid \kappa \in j(X)\}$$

Dobbiamo dimostrare che è  $L$ -ultrafiltro. Anzitutto ricordiamo che  $\mathcal{P}(\kappa)^L \subseteq L_{\kappa^+} \subseteq L_\alpha$ , quindi possiamo sostituire  $L_\alpha$  con  $L$ :

$$U = \{X \in \mathcal{P}(\kappa) \cap L \mid \kappa \in j(X)\}$$

Possiamo applicare il lemma 3.35 con  $M = N = L$ ,  $j = k$ , per concludere che  $U$  è  $L$ -ultrafiltro.

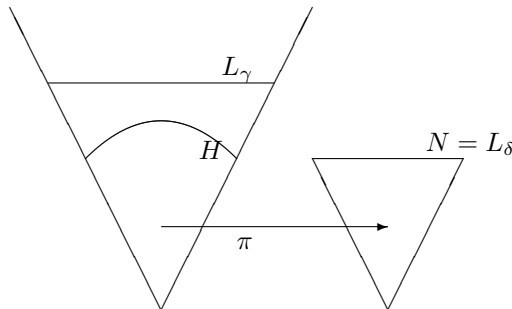
Resta da dimostrare che  ${}^k L/U$  è ben fondata. Consideriamo una successione di funzioni  $f_n \in {}^k L \cap L$  e immaginiamo per assurdo che

$$\forall n \in \omega \quad {}^k L/U \models [f_{n+1}]_U E_U [f_n]_U$$

Per il teorema di Los equivale a

$$\forall n \in \omega \quad X_n := \{\xi \in \kappa \mid f_{n+1}(\xi) \in f_n(\xi)\} \in U$$

Il problema è che non so in quale livello di  $L$  si trovino queste funzioni. Sia  $\gamma > \kappa$  un ordinale limite tale che  $\{f_n\}_{n \in \omega} \subset L_\gamma$ ; sia poi  $H \prec L_\gamma$  la chiusura di Skolem in  $L_\gamma$  di  $\kappa \cup \{f_n\}_{n \in \omega}$ ,  $\pi : H \rightarrow N$  il suo collasso transitivo. Allora  $N$  è un  $L_\delta$  per  $\delta$  opportuno. Inoltre  $\delta < \alpha$ , perchè la cardinalità del modello è  $\kappa$  e  $|\alpha| > \kappa$ . Siamo riusciti a trovare delle funzioni  $\bar{f}_n := \pi(f_n)$  analoghe alle  $\{f_n\}$  e di cui conosciamo la posizione in  $L$ .



Osserviamo che  $\forall \xi < \kappa \ \pi(\xi) = \xi$ , quindi

$$X_n = \{\xi \in \kappa \mid \bar{f}_{n+1}(\xi) \in \bar{f}_n(\xi)\}$$

Riassumendo,  $\{\bar{f}_n\}_{n \in \omega} \subseteq L_\delta \subseteq L_\alpha$ . Per definizione di  $U$ ,

$$X_n \in \mathcal{P}(\kappa)^L \wedge \kappa \in j(X_n);$$

questo vuol dire che:

$$\forall n \in \omega \quad L \models \forall \xi \in X_n \ (\bar{f}_{n+1}(\xi) \in \bar{f}_n(\xi))$$

per elementarità:

$$\forall n \in \omega \quad L \models \forall \xi \in j(X_n) \ (j(\bar{f}_{n+1})(\xi) \in j(\bar{f}_n)(\xi))$$

e in particolare, giacchè  $\kappa \in j(X_n)$ ,

$$\forall n \in \omega \quad L \models j(\bar{f}_{n+1})(\kappa) \in j(\bar{f}_n)(\kappa)$$

che è evidentemente una contraddizione.

**(c)  $\Rightarrow$  (d)** Intendiamo dimostrare che lo stesso ultrafiltro  $U$  dell'ipotesi è iterabile. Tale dimostrazione è piuttosto articolata e si divide in due parti: nella prima si esclude che  $\tau$  sia successore, nella seconda che sia limite. Per motivi di spazio riportiamo queste dimostrazioni come lemmi.

□

**Lemma 3.45.**  *$\tau$  non può essere un ordinale successore.*

*Dimostrazione.* Sia  $\delta = \alpha + 1$ , dimostriamo che  $E_\alpha$  è ben fondata e dunque  $\tau \neq \delta$ .

Vogliamo costruire esplicitamente un isomorfismo  $\langle L, \in \rangle \xrightarrow{\sim} \langle {}^{\kappa_\alpha} M_\alpha / U_\alpha, E_{U_\alpha} \rangle$ .

Preso  $x \in L$  grazie al lemma 3.39  $x = i_{0_\alpha}(g)(\kappa_{\gamma_1}, \dots, \kappa_{\gamma_n})$  per una funzione  $g \in {}^{[\kappa]^m} L \cap L$  e indici  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  opportuni.

A sua volta, sapendo che la prima iterata è ben fondata,  $g = \pi_0([f]_U)$  per un'opportuna  $f \in {}^\kappa L$ , e in effetti possiamo assumere che per ogni  $\xi < \kappa$   $f(\xi)$  sia una funzione in  ${}^{[\xi]^n} L$ .

Definisco dunque una nuova funzione  $\bar{f}$  cambiando l'ordine degli argomenti di  $f$ :

$$\bar{f}(\xi_1, \dots, \xi_n)(\xi) = \begin{cases} f(\xi)(\xi_1, \dots, \xi_n) & \text{se } \xi_1 < \dots < \xi_n < \xi \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ed infine l'isomorfismo preannunciato è

$$e : \begin{array}{ccc} \langle L, \in \rangle & \rightarrow & \langle {}^{\kappa_\alpha} M_\alpha / U_\alpha, E_{U_\alpha} \rangle \\ x = i_{0_\alpha}(g)(\kappa_{\gamma_1}, \dots, \kappa_{\gamma_n}) & \mapsto & \pi_\alpha[i_{0_\alpha}(\bar{f})(\kappa_{\gamma_1}, \dots, \kappa_{\gamma_n})]_{U_\alpha} \end{array}$$

Resta da dimostrare che è isomorfismo. Osserviamo, facendo ricorso al lemma 3.42, che

$$\begin{aligned}
\langle L, \in \rangle &\models \varphi[i_{0\alpha}(g)(\kappa_{\gamma_1}, \dots, \kappa_{\gamma_n})] \text{ sse} \\
\langle L, \in, U \rangle &\models \{ \{ \xi_1, \dots, \xi_n \} \in [\kappa]^n \mid \varphi[g(\xi_1, \dots, \xi_n)] \} \in U^n \text{ sse} \\
\langle L, \in, U \rangle &\models \{ \{ \xi_1, \dots, \xi_n \} \in [\kappa]^n \mid \{ \xi < \kappa \mid \varphi[f(\xi)(\xi_1, \dots, \xi_n)] \} \in U \} \in U^n \text{ sse} \\
\langle L, \in, U \rangle &\models \{ \{ \xi_1, \dots, \xi_n \} \in [\kappa]^n \mid \{ \xi < \kappa \mid \varphi[\bar{f}(\xi_1, \dots, \xi_n)(\xi)] \} \in U \} \in U^n \text{ sse} \\
\langle M_\alpha, \in, U_\alpha \rangle &\models \{ \xi < \kappa_\alpha \mid \varphi[i_{0\alpha}(\bar{f})(\kappa_{\gamma_1}, \dots, \kappa_{\gamma_n})(\xi)] \} \in U_\alpha \text{ sse} \\
\langle {}^{\kappa_\alpha}M_\alpha/U_\alpha, E_{U_\alpha} \rangle &\models \varphi[[i_{0\alpha}(\bar{f})(\kappa_{\gamma_1}, \dots, \kappa_{\gamma_n})]_{U_\alpha}]
\end{aligned}$$

Se  $\varphi$  è la formula  $i_{0\alpha}(g)(\kappa_{\gamma_1}, \dots, \kappa_{\gamma_n}) = i_{0\alpha}(g')(\kappa_{\gamma'_1}, \dots, \kappa_{\gamma'_n})$ , essa viene preservata, quindi la funzione  $e$  è ben definita. E poichè l'osservazione vale per una  $\varphi$  qualsiasi,  $e$  è anche funzione elementare (l'abbiamo dimostrato solo per formule con una variabile libera, ma è analogo per le altre).

Infine la suriettività deriva dal fatto che ogni  $y$  nel codominio è esprimibile come  $y = \pi_\alpha([h]_{U_\alpha}) = \pi_\alpha([i_{0\alpha}(g)(\kappa_{\gamma_1}, \dots, \kappa_{\gamma_n})]_{U_\alpha})$  per parametri opportuni.  $\square$

**Osservazione 3.46.** Sia  $j : M \prec N$ , di punto critico  $\geq \kappa$ . Preso  $X \in \mathcal{P}(\kappa) \cap M$ ,  $M \models x \in X \subseteq \kappa$  implica che  $N \models j(x) \in j(X) \subseteq j(\kappa)$  e quindi

$$j''X \subseteq j(X) \subseteq j(\kappa)$$

Inoltre se  $M \subseteq N$ ,  $j''X = X$  (perchè il punto critico è maggiore) quindi

$$X \subseteq j(X) \subseteq j(\kappa)$$

$$X = j(X) \cap \kappa.$$

**Lemma 3.47.**  $\tau$  non può essere un ordinale limite.

*Dimostrazione.* Se  $\delta$  è limite vogliamo dimostrare che il limite diretto delle strutture  $\{ \langle M_\alpha, \in, U_\alpha \rangle \mid \alpha < \delta \}$  di morfismi  $\{ i_{\alpha\beta} \mid \alpha \leq \beta < \delta \}$  è ben fondato, e quindi  $\tau \neq \delta$ . Come al solito gli  $U_\alpha$  sono  $M_\alpha$ -ultrafiltri su opportuni  $\kappa_\alpha$ .

Scegliamo

$$H = H_0 = \{ x \in L \mid \forall \alpha < \delta (i_{0\alpha}(x) = x) \};$$

osserviamo che è classe propria (ad esempio si può osservare che essa è illimitata) e contiene tutti gli elementi di  $\kappa$ . Definiamo poi per ogni  $\alpha < \delta$

$$H_\alpha = \text{Cl}_{H(L) \cap \Sigma_1}(H \cup \{ \kappa_\gamma \mid \gamma < \alpha \}) \prec L$$

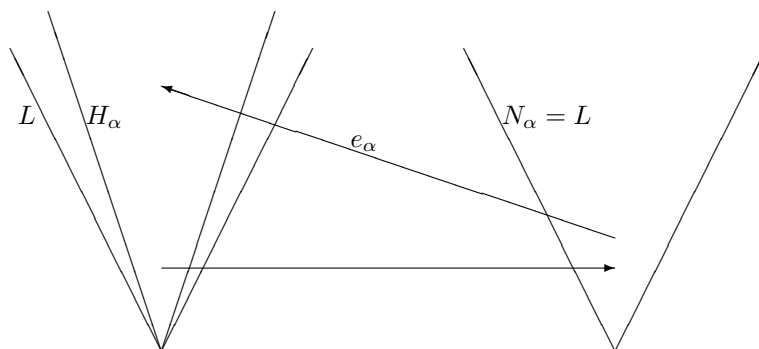
la chiusura di Skolem dell'insieme  $H \cup \{ \kappa_\gamma \mid \gamma < \alpha \}$  in  $L$  rispetto alle sole formule  $\Sigma_1$ . Questa costruzione è leggermente diversa da quella del lemma 1.8; ma si dimostra che anche in questo caso la struttura è sottostruttura di  $L$ . Anche le  $H_\alpha$  sono classi proprie.

Si osserva poi che ogni  $H_\alpha$  è estensionale: infatti, se  $a, b \in H_\alpha$  con  $a \neq b$ , e  $x \in a \setminus b$ , allora anche  $H_\alpha$  soddisfa la formula  $x \in a \setminus b$ , e dunque la relazione

di appartenenza è estensionale. In queste condizioni per il lemma del collassamento esiste un collasso transitivo  $N_\alpha$ ; e inoltre  $N_\alpha = L$  perchè  $H_\alpha \prec L$  soddisfa l'enunciato  $\sigma_0$  del lemma 1.11. Considerando poi l'inversa della funzione collassante, essa è immersione  $\Sigma_1$ -elementare:

$$e_\alpha : N_\alpha \prec_1 L$$

e dunque è anche  $\Sigma_n$ -elementare per ogni  $n$ . La sua immagine è esattamente  $H_\alpha$ .



Infine definiamo

$$e_{\alpha\beta} := e_\beta^{-1} \circ e_\alpha : L \prec_1 L$$

Tale funzione è ben definita perchè l'immagine di  $e_\alpha$  è  $H_\alpha \subseteq H_\beta$ , su cui è anche definita  $e_\beta^{-1}$ .

Osserviamo ancora che se  $\gamma$  è limite (eventualmente  $\delta$ ) allora  $H_\gamma = \bigcup_{\alpha < \gamma} H_\alpha$  e quindi anche  $N_\gamma = \bigcup_{\alpha < \gamma} N_\alpha$ . Ho costruito un nuovo sistema diretto  $\{\langle N_\alpha, \in \rangle \mid \alpha < \delta\}$  di morfismi  $\{e_{\alpha\beta} \mid \alpha \leq \beta < \delta\}$ ; e in più so che il limite diretto  $N_\delta$  è ben fondato, è  $N_\delta = L$ . Ma i domini del due sistemi sono gli stessi, perchè  $M_\alpha = N_\alpha = L$ ; quindi mi basta dimostrare che in effetti  $e_{\alpha\beta} = i_{\alpha\beta}$  per concludere.

Iniziamo da alcune osservazioni preliminari.

1.  $i_{\alpha\beta}$  è morfismo elementare di punto critico  $\kappa_\alpha$ . Quindi grazie all'osservazione 3.46 per ogni  $X \subseteq \kappa$

$$X \subseteq i_{\alpha\beta}(X) \subseteq \kappa_\beta$$

e

$$X = i_{\alpha\beta}(X) \cap \kappa_\alpha.$$

2.  $i_{\alpha\beta}$  preserva tutti gli elementi di  $H_\alpha$ . Infatti, se  $x \in H_\alpha$ , per definizione esiste una  $\Sigma_1$ -formula  $\phi$  e dei parametri opportuni  $\vec{y} \in H$  per cui  $x = h_\phi(\vec{y}, \kappa_{\gamma_1}, \dots, \kappa_{\gamma_n})$ ; per definizione di  $H$ ,  $i_{0\gamma}(\vec{y}) = \vec{y}$  per ogni  $\gamma < \delta$  e in particolare  $i_{\alpha\beta}(\vec{y}) = \vec{y}$ ; e quindi  $i_{\alpha\beta}(x) = i_{\alpha\beta}(h_\phi(\vec{y}, \kappa_{\gamma_1}, \dots, \kappa_{\gamma_n})) = h_\phi(\vec{y}, \kappa_{\gamma_1}, \dots, \kappa_{\gamma_n}) = x$ .
3.  $\kappa$  è sottoclasse transitiva di  $H = H_0$  e quindi è preservata dalla funzione collassante e dalla sua inversa  $e_0$ .

4. Sia  $X \subseteq \kappa, X \in L$ . Da **3** segue che  $\text{crit}(e_0) \geq \kappa$ , quindi

$$X \subseteq e_0(X) \subseteq e_0(\kappa)$$

e

$$X = e_0(X) \cap \kappa$$

Vogliamo dimostrare le stesse cose per una  $e_\alpha$  qualsiasi.

5. Per costruzione  $\kappa_\alpha \subseteq H_\alpha$ . Sia  $\xi < \kappa_\alpha$ ; allora  $\xi = i_{0\alpha}(f)(\kappa_{\gamma_1}, \dots, \kappa_{\gamma_n})$  per  $f \in {}^{[\kappa]} \kappa$  e parametri opportuni. Per l'elementarità di  $e_0$  e per l'osservazione **3** risulta  $f = e_0(f) \upharpoonright [\kappa]^n$ . Ma per costruzione  $e_0(f) \in H$  e quindi  $i_{0\alpha}(f) = e_0(f) \upharpoonright [\kappa]^n$ . Infine, essendo  $\kappa_{\gamma_1}, \dots, \kappa_{\gamma_n} < \alpha$ ,  $\xi = i_{0\alpha}(f)(\kappa_{\gamma_1}, \dots, \kappa_{\gamma_n}) \in H_\alpha$ .

6. Da **5** segue che  $\kappa_\alpha$  è sottoclasse transitiva di  $H_\alpha$  e quindi è preservata dalla funzione collassante e dalla sua inversa  $e_\alpha$ .

7. Sia  $X \subseteq \kappa_\alpha, X \in L$ . Da **6** segue che  $\text{crit}(e_\alpha) \geq \kappa_\alpha$ , quindi

$$X \subseteq e_\alpha(X) \subseteq e_\alpha(\kappa_\alpha)$$

e

$$X = e_\alpha(X) \cap \kappa_\alpha$$

8. Per  $X \subseteq \kappa_\alpha, X \in L$ ,

$$i_{\alpha\beta}(X) = e_{\alpha\beta}(X) \cap \kappa_\beta.$$

Infatti

$$\begin{aligned} i_{\alpha\beta}(X) &= i_{\alpha\beta}(e_\alpha(X) \cap \kappa_\alpha) = i_{\alpha\beta}(e_\alpha(X)) \cap i_{\alpha\beta}(\kappa_\alpha) = \\ &= e_\alpha(X) \cap \kappa_\beta = e_\beta^{-1}(e_\alpha(X) \cap \kappa_\beta) = e_{\alpha\beta}(X) \cap \kappa_\beta \end{aligned}$$

La terza uguaglianza vale perchè  $i_{\alpha\beta}$  preserva gli elementi di  $H_\alpha$ , mentre la quarta perchè  $e_\beta^{-1}$  preserva gli elementi di  $\kappa_\beta$  (cfr. i punti **2** e **6**).

9. Ponendo nel punto precedente  $X = \kappa_\alpha$  si osserva che il punto critico di  $e_{\alpha\beta}$  è

$$e_{\alpha\beta}(\kappa_\alpha) = \kappa_\beta$$

e quindi per ogni  $X \in \mathcal{P}(\kappa_\alpha) \cap M_\alpha$ ,

$$X \subseteq e_{\alpha\beta}(X) \subseteq \kappa_\beta$$

e

$$X = e_{\alpha\beta}(X) \cap \kappa_\alpha$$

Terminate le osservazioni, dimostriamo che  $i_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}$  per induzione su  $\beta$ , con  $\alpha \leq \beta < \delta$ . Il caso 0 è banale perchè le due funzioni sono l'identità su  $L$ ; i casi limite sono pure banali perchè le funzioni sono definite allo stesso modo, prendendo il limite induttivo. Sia quindi  $\beta$  ordinale successore, ci basta dimostrare il caso  $\beta = \alpha + 1$ .

Ricordando il lemma **3.31**,

$$M_{\alpha+1} = L = \{i_{\alpha,\alpha+1}(f)(\kappa_\alpha) \mid f \in {}^{\kappa_\alpha} L \cap L\}.$$

Definiamo

$$j : \begin{array}{ccc} M_{\alpha+1} & \rightarrow & N_{\alpha+1} \\ i_{\alpha, \alpha+1}(f)(\kappa_\alpha) & \mapsto & e_{\alpha, \alpha+1}(f)(\kappa_\alpha) \end{array}$$

Intendiamo dimostrare che  $j$  è isomorfismo; in tal caso, deve essere l'identità. Questo è sufficiente, perchè allora per ogni  $x \in L$

$$i_{\alpha, \alpha+1}(x) = i_{\alpha, \alpha+1}(c_x)(\kappa_\alpha) = e_{\alpha, \alpha+1}(c_x)(\kappa_\alpha) = e_{\alpha, \alpha+1}(x)$$

Per prima cosa osserviamo che  $j$  è ben definita ed iniettiva:

$$\begin{aligned} i_{\alpha, \alpha+1}(f)(\kappa_\alpha) = i_{\alpha, \alpha+1}(g)(\kappa_\alpha) &\Leftrightarrow \kappa_\alpha \in i_{\alpha\beta}(\{\xi < \kappa_\alpha \mid f(\xi) = g(\xi)\}) \\ &\Leftrightarrow \kappa_\alpha \in e_{\alpha\beta}(\{\xi < \kappa_\alpha \mid f(\xi) = g(\xi)\}) \\ &\Leftrightarrow e_{\alpha, \alpha+1}(f)(\kappa_\alpha) = e_{\alpha, \alpha+1}(g)(\kappa_\alpha) \end{aligned}$$

dove nella seconda equivalenza ho fatto appello all'osservazione 8. In tutta la precedente argomentazione posso sostituire ' $\in$ ' ad '=' dimostrando così che  $j$  è morfismo, non necessariamente elementare.

Per mostrare che  $j$  è isomorfismo ci manca solo più la suriettività. Prendiamo  $y \in N_{\alpha+1}$ . Per costruzione,  $e_{\alpha+1}(y) \in H_{\alpha+1}$  e quindi

$$e_{\alpha+1}(y) = h_\phi(\vec{x}, \kappa_{\gamma_1}, \dots, \kappa_{\gamma_m}, \kappa_\alpha)$$

per opportuni  $\phi$   $\Sigma_1$ -formula,  $\vec{x} \in H$ ,  $\gamma_1 < \dots < \gamma_m < \alpha$ . Cerchiamo una funzione  $f \in {}^{\kappa_\alpha}L \cap L$  tale che

$$e_{\alpha, \alpha+1}(f)(\kappa_\alpha) = y$$

e questa è:

$$f(\xi) = h_\phi(\vec{x}, \kappa_{\gamma_1}, \dots, \kappa_{\gamma_m}, \xi).$$

Bisogna però dimostrarlo. Consideriamo la formula:

$$\forall \xi < \kappa_\alpha (f(\xi) = h_\phi(\vec{x}, \kappa_{\gamma_1}, \dots, \kappa_{\gamma_m}, \xi)) \quad (*)$$

Ricordiamo la definizione di funzione di Skolem:

$$h_\phi(\vec{x}) = y \Leftrightarrow [(\neg \exists w \phi(w, \vec{x}) \wedge y = \emptyset) \vee (\phi(y, \vec{x}) \wedge \forall z (\phi(z, \vec{x}) \Rightarrow z \geq_L y))]$$

Supponendo che  $\geq_L$  sia formula  $\Sigma_k$ , tale formula è  $\Sigma_{k+1}$ . Ma  $e_{\alpha, \alpha+1}$  è  $\Sigma_n$ -elementare per ogni  $n$  prefissato, quindi rispetta anche questa formula. E pertanto rispetta anche la formula (\*):

$$\begin{aligned} &\forall \xi < \kappa_\alpha (f(\xi) = h_\phi(\vec{x}, \kappa_{\gamma_1}, \dots, \kappa_{\gamma_m}, \xi)) \\ \Rightarrow &\forall \xi < \kappa_{\alpha+1} (e_{\alpha, \alpha+1}(f)(\xi) = h_\phi(\vec{x}, \kappa_{\gamma_1}, \dots, \kappa_{\gamma_m}, \xi)) \\ \Rightarrow &e_{\alpha, \alpha+1}(f)(\kappa_\alpha) = h_\phi(\vec{x}, \kappa_{\gamma_1}, \dots, \kappa_{\gamma_m}, \kappa_\alpha) \\ \Rightarrow &e_{\alpha, \alpha+1}(f)(\kappa_\alpha) = y \end{aligned}$$

e questo completa la dimostrazione.  $\square$

## 3.7 Un corollario

La seguente proposizione, molto importante, è un corollario del teorema appena dimostrato:

**Proposizione 3.48.** *Se esiste un cardinale misurabile allora esiste  $0^\#$ .*

*Dimostrazione.* Infatti l'esistenza di un cardinale misurabile implica l'esistenza di un'immersione non banale  $j : V \prec M$  per una qualche classe propria  $M$  (prop. 3.24). Restringendola ad  $L$ , tale immersione continua ad essere non banale, perchè è non banale su  $\text{On}$ . Inoltre  $j$  rispetta la formula ' $x \in L$ ', quindi l'immagine di  $j \upharpoonright L$  è ancora in  $L$ :

$$j \upharpoonright L : L \prec L$$

il che equivale all'esistenza di  $0^\#$ . □



## Capitolo 4

# Teoria descrittiva degli insiemi

In questo capitolo studiamo più in dettaglio l'insieme  $\mathbb{R}$ , che per noi è  ${}^\omega\omega$ , e le sue potenze  $\mathbb{R}^k = {}^k({}^\omega\omega)$  con  $k \in \omega$ . Per la precisione, la teoria descrittiva degli insiemi si occupa dei sottoinsiemi definibili  $\mathbb{R}$ .

La topologia che consideriamo su  $\omega$  è quella discreta;  $\mathbb{R}$  è dotato della topologia prodotto, che risulta avere per base

$$\mathcal{B} = \{N_s \mid s \in {}^{<\omega}\omega\}$$

dove

$$N_s = \{f \in {}^\omega\omega \mid s \subseteq f\}$$

sono gli aperti di base. La topologia ammette evidentemente base numerabile; inoltre rende  ${}^\omega\omega$  completamente sconnesso ed omeomorfo all'insieme degli irrazionali (quindi non esattamente  $\mathbb{R}$ , ma per molti versi simile, vedi Levy [5, §VII]).

$\mathbb{R}^k$  è dotato della topologia prodotto. Notiamo anche che con questa topologia  $\mathbb{R}$  è omeomorfo a  $\mathbb{R}^k$ .

### 4.1 $\Sigma_\alpha^i$ e $\Pi_\alpha^i$

Descriviamo ora due gerarchie di sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^k$ .

La prima prende il nome di **gerarchia di Borel**. Se  $X \subseteq \mathbb{R}^{<\omega}$

1.  $X \in \Sigma_1^0$  sse  $X$  è aperto;  
 $X \in \Pi_1^0$  sse  $X$  è chiuso;
2.  $X \in \Sigma_\alpha^0$  sse è unione numerabile di insiemi  $\Pi_\beta^0$  con  $\beta < \alpha$ ,  
 $X \in \Pi_\alpha^0$  sse è intersezione numerabile di insiemi  $\Sigma_\beta^0$  con  $\beta < \alpha$ .
3.  $\Delta_\alpha^0 := \Sigma_\alpha^0 \cap \Pi_\alpha^0$ .

Si può dimostrare che la gerarchia si completa per  $\alpha = \omega_1$ , cioè il procedere oltre  $\omega_1$  passi non dà luogo a nuovi insiemi.

Generalmente questi termini vengono usati come aggettivi ( $X$  è  $\Sigma_1^0$ ), ma possiamo provare anche a descriverli come insiemi:

$$\Sigma_1^0 := \bigcup_{k < \omega} \{\text{aperti di } \mathbb{R}^k\}$$

$$\Pi_1^0 := \bigcup_{k < \omega} \{\text{chiusi di } \mathbb{R}^k\}$$

$$\Sigma_\alpha^0 := \bigcup_{k < \omega} \{X \subseteq \mathbb{R}^k \mid X = \bigcup_{n < \omega} X_n, X_n \in \bigcup_{0 < \beta < \alpha} \Pi_\beta^0\}$$

$$\Pi_\alpha^0 := \bigcup_{k < \omega} \{X \subseteq \mathbb{R}^k \mid X = \bigcap_{n < \omega} X_n, X_n \in \bigcup_{0 < \beta < \alpha} \Sigma_\beta^0\}$$

Il nome della gerarchia è dovuto al fatto che l'unione di tutti i livelli è l'insieme dei Boreliani, cioè la più piccola  $\sigma$ -algebra che genera gli aperti di  $\mathbb{R}^k$ :

$$\text{Boreliani} = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \Sigma_\alpha^0 = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \Pi_\alpha^0$$

Spesso hanno interesse i livelli più bassi della gerarchia, con  $\alpha < \omega$ ; sono detti **livelli di Borel finiti**.

La seconda gerarchia invece è conosciuta come **gerarchia proiettiva**. Se chiamiamo  $p$  l'operatore proiezione,

1.  $\Sigma_0^1 := \Sigma_1^0$ .
2.  $A \in \Sigma_{n+1}^1$  sse  $A = pB$  per  $B \in \Pi_n^1$ .
3.  $A \in \Pi_{n+1}^1$  sse  $A = pB$  per  $B \in \Sigma_n^1$ .
4.  $\Delta_n^1 := \Sigma_n^1 \cap \Pi_n^1$ .
5. Chiamiamo **analitico (analytic)** un insieme  $\Sigma_1^1$ .<sup>1</sup>

Esplicitamente:

$$\Sigma_{n+1}^1 := \bigcup_{k < \omega} \{A \subseteq \mathbb{R}^k \mid \exists B \in \Pi_n^1 \cap \mathcal{P}^{(k+1)(\omega)} \text{ tale che } A = pB\}$$

$$\Pi_n^1 := \bigcup_{k < \omega} \{A \subseteq \mathbb{R}^k \mid \mathbb{R}^k \setminus A \in \Sigma_n^1\}$$

Storicamente nasce prima la definizione di insieme analitico, e solo dopo la si generalizza alla gerarchia proiettiva.

Il simbolismo  $\Sigma_\alpha^i$  e  $\Pi_\alpha^i$  è dovuto ad Addison.

**Lemma 4.1** (Proprietà immediate).

1. Per  $A \subseteq \mathbb{R}^k$ ,  $A \in \Sigma_\alpha^i \Leftrightarrow \mathbb{R}^k \setminus A \in \Pi_\alpha^i$ ;
2. Ogni  $\Sigma_\alpha^i \cap \mathcal{P}^{(k)(\omega)}$  è chiuso per unioni numerabili;

<sup>1</sup>Sfortunatamente la traduzione in italiano non rende la distinzione tra *analytic* e *analytical*, quindi preferisco mantenere la terminologia inglese.

3. Ogni  $\Pi_\alpha^i \cap \mathcal{P}({}^k(\omega))$  è chiuso per intersezioni numerabili.

Seppure le due gerarchie siano definite in maniera piuttosto diversa, esse — come suggerisce la notazione — non sono completamente indipendenti:

**Proposizione 4.2** (Suslin). *Sia  $A \subseteq {}^k(\omega)$ . Allora  $A$  è Borel sse sia  $A$  che il suo complementare sono analytic. Ciò equivale a dire che  $A$  è  $\Delta_1^1$ :*

$$\bigcup_{\alpha < \omega_1} \Sigma_\alpha^0 = \Delta_1^1$$

Quindi la gerarchia proiettiva estende, propriamente, quella Boreliana.

## 4.2 $\Sigma_\alpha^i$ e $\Pi_\alpha^i$

Introduciamo una seconda gerarchia sui sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^k$ , di tipo più semantico, più affine, volendo, alla definizione di formule  $\Sigma_n$  e  $\Pi_n$ . Distingueremo graficamente le due gerarchie mediante l'uso del boldface ( $\Sigma_n^m$ ) o lightface ( $\Sigma_n^m$ ); un risultato importante riguarderà il legame tra queste due categorie.

### 4.2.1 Codifiche

A ogni reale corrisponde una relazione su  $\mathbb{R}$  che dipende però dalla codifica delle stringhe adottata. Per chiarezza riportiamo l'una e l'altra.

- Codifica di una stringa:

$$\begin{aligned} \text{cod} : \quad \omega^{<\omega} &\rightarrow \omega \\ (m_0, \dots, m_r) &\mapsto p_0^{m_0+1} \cdot \dots \cdot p_r^{m_r+1} \end{aligned}$$

dove  $(p_n)$  è la successione dei numeri primi. Notiamo che la codifica non è suriettiva: ad esempio il numero 10 non codifica alcuna stringa di interi.

- Decodifica di una stringa:

$$\text{dec}(m, i) = \min \{e \in \omega \mid p_i^{e+2} \text{ non divide } m\}$$

Notiamo che restituisce 0 anche se l'indice  $i$  è out-of-range.

- Notiamo che il problema di fissare un'enumerazione di  ${}^{<\omega}\omega$  è equivalente al fissare una funzione di decodifica; vale a dire, un'enumerazione possibile è  $\langle s_i \mid i \in \omega \rangle$  dove:

$$s_i = \begin{cases} (m_1, \dots, m_n) & \text{se } i = \text{cod}(m_1, \dots, m_n) \\ \emptyset & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$s_i$  è semplicemente la funzione di decodifica:  $s_i(j) = \text{dec}(i, j)$ .

Una proprietà interessante di questa enumerazione è che  $\forall i \in \omega (|s_i| \leq i)$ .

- Due funzioni utili: se  $x \in {}^\omega\omega$ ,

$$\bar{x}(m) := \text{cod}(x(0), \dots, x(m-1))$$

che di una funzione  $x$  conserva solo i primi  $m$  valori;

$$(x)_i(m) := x(\text{cod}(i, m))$$

che permette di utilizzare una sola funzione  $x$  al posto di numerabili  $(x)_i$ . Si può estendere la prima notazione al caso  $\mathbf{w} \in {}^r\omega \times {}^k({}^\omega\omega)$  assumendo che

$$\overline{\mathbf{w}}(m) := (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r, \overline{x}_1(m), \dots, \overline{x}_k(m)) \in {}^{r+k}\omega$$

- Ad una funzione  $x \in {}^\omega\omega$  corrisponde una relazione  $E_x$  su  $\omega$ :

$$mE_x n \iff x(\text{cod}(m, n)) = 0$$

e viceversa ogni relazione  $E$  può essere scritta come  $E_x$  in infiniti modi differenti, ad esempio scegliendo

$$x(i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = \text{cod}(m, n) \text{ e } mEn \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- Alla relazione  $E_x$  corrisponde poi una struttura:  $M_x = \langle \omega, E_x \rangle$ .  $\pi_x$  è la funzione, se esiste, che mappa  $M_x$  nel suo collasso transitivo.

### 4.2.2 Aritmetica del secondo ordine

Possiamo vedere i sottoinsiemi definibili di  $\mathbb{R}^k$  come predicati su  ${}^\omega\omega$ . Lavoreremo quindi non in  ${}^\omega\omega$  bensì nell'**aritmetica del secondo ordine**, un'estensione di  $\omega$  in linguaggio del secondo ordine che possiamo indicare  $\text{LST}^2$ . Per la definizione di strutture del secondo ordine si deva la sezione introduttiva 1.3.7.

Occorreranno due tipi di quantificatori e di variabili:

- $v_n^0, \exists^0, \forall^0$  che variano in  $\omega$  (variabili numeriche);
- $v_n^1, \exists^1, \forall^1$  che variano in  ${}^\omega\omega$  (variabili funzionali). Usiamo  ${}^\omega\omega$  anziché  $\mathcal{P}(\omega)$  per comodità.

La struttura è allora:

$$\mathcal{A}^2 := \langle \omega, {}^\omega\omega, +, \cdot, \exp, <, 0, 1, \text{ap} \rangle$$

I simboli necessitano di qualche spiegazione:

- i simboli  $+, \cdot, <, 0, 1$  hanno il significato usuale;
- $\exp : \omega \rightarrow \omega$  è la funzione  $n \mapsto 2^n$ ;
- $\text{ap} : {}^\omega\omega \times \omega \rightarrow \omega$  è l'operatore di applicazione di funzioni;
- I termini (numerici) di  $\mathcal{A}^2$  si ottengono chiudendo l'insieme  $\{0, 1, v_n^0\}_{n \in \omega}$  rispetto alle funzioni  $\{+, \cdot, \exp, \text{ap}(v_i^1, \cdot)\}_{i \in \omega}$ .
- Parleremo di *quantificatori limitati* riferendoci ai soli quantificatori numerici: non ha molto senso un quantificatore funzionale limitato.

Notiamo però che un elemento di  ${}^\omega\omega$  è da vedersi come un reale più che come una funzione intera.

Ci occupiamo ora della complessità delle formule di  $\mathcal{A}^2$ . Le formule  $\Sigma_0^1$  sono (a meno di equivalenza) della forma

$$\exists^1 x_1 \dots \exists^1 x_k \psi$$

dove  $\psi$  è formula priva di quantificatori funzionali e i cui eventuali quantificatori numerici sono tutti limitati.

Dualmente per le formule  $\Pi_0^1$ .

**Proposizione 4.3** (Quantificatori numerici). *In  $\mathcal{A}^2$  è possibile:*

1. *Scambiare l'ordine delle quantificazioni, in particolare per anticipare tutti i quantificatori funzionali:*

$$\forall^0 m \exists^1 x R(m, \mathbf{w}, x) \Leftrightarrow \exists^1 z \forall^0 m R(m, \mathbf{w}, (z)_m)$$

$$\exists^0 m \forall^1 x R(m, \mathbf{w}, x) \Leftrightarrow \forall^1 z \exists^0 m R(m, \mathbf{w}, (z)_m)$$

*Naturalmente lo scambio dei quantificatori  $\exists^0 \exists^1$  e  $\forall^0 \forall^1$  è possibile e triviale.*

2. *Contrarre i quantificatori:*

$$\exists^0 m \exists^1 x R(m, \mathbf{w}, x) \Leftrightarrow \exists^1 z R((z)_0(0), \mathbf{w}, (z)_1)$$

$$\forall^0 m \forall^1 x R(m, \mathbf{w}, x) \Leftrightarrow \forall^1 z R((z)_0(0), \mathbf{w}, (z)_1)$$

$$\exists^1 x \exists^1 y R(\mathbf{w}, x, y) \Leftrightarrow \exists^1 z R(\mathbf{w}, (z)_0, (z)_1)$$

$$\forall^1 x \forall^1 y R(\mathbf{w}, x, y) \Leftrightarrow \forall^1 z R(\mathbf{w}, (z)_0, (z)_1)$$

3. *Contrarre tutti i quantificatori numerici, purchè sia presente un quantificatore funzionale:*

$$\forall^1 x R(\mathbf{w}, x) \Leftrightarrow \forall^1 z \exists^0 m \widehat{R}(m, \mathbf{w}, z)$$

$$\exists^1 x R(\mathbf{w}, x) \Leftrightarrow \exists^1 z \exists^0 m \widehat{R}(m, \mathbf{w}, z)$$

dove  $\widehat{R}$  è relazione  $\Delta_0^0$ . Di più,

$$\forall^1 x R(\mathbf{w}, x) \Leftrightarrow \forall^1 z \exists^0 m \widehat{R}(m, \overline{\mathbf{w}}(m), \bar{z}(m))$$

$$\exists^1 x R(\mathbf{w}, x) \Leftrightarrow \exists^1 z \exists^0 m \widehat{R}(m, \overline{\mathbf{w}}(m), \bar{z}(m))$$

*Dimostrazione.* I primi due punti sono banali ricordando il significato delle funzioni  $(z)_m$ .

Per il terzo, dimostro solo il caso  $\forall^1 x R(\mathbf{w}, x)$ , l'altro ne è la negazione. Anzi tutto scriviamo  $R$  in forma normale premessa ed eliminiamo tutti i quantificatori

universali; scrivo  $R$  come se fosse  $\Sigma_k^0$ , ma il caso  $\Pi_k^0$  è identico. Vale:

$$\begin{aligned}
 \forall^1 x R(\mathbf{w}, x) &\Leftrightarrow \forall^1 x \exists^0 m_1 \forall^0 m_2 \exists^0 m_3 \dots P(m_1, m_2, \dots, \mathbf{w}, x) \\
 &\quad \text{dove } P \text{ è } \Delta_0^0 \\
 &\Leftrightarrow \forall^1 x \exists^0 m_1 \forall^1 z_2 \exists^0 m_3 \forall^1 z_4 \dots P(m_1, (z_2)(0), m_3, (z_4)(0) \dots, \mathbf{w}, x) \\
 &\Leftrightarrow \forall^1 x \forall^1 z_2 \forall^1 z_4 \exists^0 m_1 \exists^0 m_3 \dots P'(m_1, m_3, \dots, \mathbf{w}, x, z_2, z_4, \dots) \\
 &\Leftrightarrow \forall^1 z \exists^0 m P''(m, \mathbf{w}, z) \\
 &\Leftrightarrow \forall^1 z \exists^0 m \exists^0 p P''(m, \bar{\mathbf{w}}(p), \bar{z}(p)) \\
 &\Leftrightarrow \forall^1 z \exists^0 m P'''(m, \bar{\mathbf{w}}(m), \bar{z}(m))
 \end{aligned}$$

□

### 4.2.3 Complessità di insiemi

Torniamo quindi al nostro proposito: definire una gerarchia di sottoinsiemi di  ${}^k(\omega^\omega)$ . Generalizzando, sia  $A \subseteq {}^s\omega \times {}^k(\omega^\omega)$ : molto spesso sarà  $s = 0$ .  $A$  non è un oggetto di  $\mathcal{A}^2$ , dobbiamo considerarlo come un predicato:

$$A(m_1, \dots, m_s, r_1, \dots, r_k) \Leftrightarrow (m_1, \dots, m_s, r_1, \dots, r_k) \in A.$$

Allora:

- $A$  si dice **analitico** (**analytical**) se è definibile in  $\mathcal{A}^2$ , cioè se esiste una formula  $\varphi$  senza parametri tale che

$$\forall w \in {}^s\omega \times {}^k(\omega^\omega) (A(w) \Leftrightarrow \mathcal{A}^2 \models \varphi(w)).$$

- $A$  si dice **aritmetico** se è definibile in  $\mathcal{A}^2$  mediante una formula priva di quantificatori funzionali;
- $A$  si dice risp.  $\Sigma_n^i$ ,  $\Pi_n^i$ ,  $\Delta_n^i$  se è definibile in  $\mathcal{A}^2$  mediante una formula risp.  $\Sigma_n^i$ ,  $\Pi_n^i$ ,  $\Delta_n^i$ .
- La gerarchia  $\Sigma_n^0$  prende il nome di **gerarchia aritmetica**; gli insiemi aritmetici coincidono infatti con  $\bigcup_{n < \omega} \Sigma_n^0$ . La gerarchia  $\Sigma_n^1$  prende invece il nome di **gerarchia analitica**.
- $A \in \Delta_1^0$  è detto **ricorsivo**.

Come nel caso della gerarchia di Borel, è possibile estendere la gerarchia  $\Sigma_n^0$  ad indici transfiniti  $\Sigma_\alpha^0$ , ma non ce ne occupiamo. La nuova costruzione prenderebbe il nome di **gerarchia iperaritmetica** e come per i boldface risulta  $\bigcup_\alpha \Sigma_\alpha^0 = \Delta_1^1$

**Lemma 4.4** (Proprietà immediate).

1. Per  $A \subseteq {}^r\omega \times {}^k(\omega^\omega)$ ,  $A \in \Sigma_n^i \Leftrightarrow {}^r\omega \times {}^k(\omega^\omega) \setminus A \in \Pi_n^i$ ;
2.  $\Sigma_n^i \cup \Pi_n^i \subseteq \Delta_{n+1}^i$ ;

#### 4.2.4 Complessità di insiemi in $\mathcal{A}^2(a)$

Sia  $a \in {}^\omega\omega$ .

$$\mathcal{A}^2(a) := \langle \omega, +, \cdot, \exp, <, 0, 1, a, {}^\omega\omega, \text{ap} \rangle$$

è l'estensione di  $\mathcal{A}^2$  ottenuta mediante l'aggiunta di un singolo reale  $a$ .

Sono analoghe alle precedenti le definizioni di un insieme:

- **analitico** per  $a$ ;
- **aritmetico** per  $a$ ;
- $\Sigma_n^i(a)$ ,  $\Pi_n^i(a)$ ,  $\Delta_n^i(a)$ ;
- **ricorsivo** per  $a$ .

### 4.3 Relazione tra le gerarchie lightface e boldface

Segue la preannunciata proprietà che lega i simboli lightface e boldface:

**Proposizione 4.5.** *Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^k$ ,  $n > 0$ . Allora:*

(i)  $A \in \Sigma_n^i$  sse  $\exists a \in \mathbb{R} \ A \in \Sigma_n^i(a)$ ;

(ii)  $A \in \Pi_n^i$  sse  $\exists a \in \mathbb{R} \ A \in \Pi_n^i(a)$ ;

Ad esempio,  $A$  è insieme  $\Sigma_1^1$  sse esistono una formula senza parametri  $\varphi$  ed un parametro  $a \in \mathbb{R}$  tale che

$$\forall \mathbf{w} \ (\mathbf{w} \in A \Leftrightarrow \exists^1 y \ \varphi(\mathbf{w}, y, a))$$

**Corollario 4.6.** *In particolare  $\Sigma_n^i \Rightarrow \Sigma_n^i$  e  $\Pi_n^i \Rightarrow \Pi_n^i$ .*

**Lemma 4.7.** *Gli insiemi  $\Sigma_m^0 \cap \mathcal{P}(\mathbb{R}^k)$  sono  $\aleph_0$ ; formano una famiglia di aperti su  $\mathbb{R}^k$ , e tale topologia ammette base numerabile.*

*Dimostrazione.* È banale, dalla definizione, osservare che non possono esserci più di  $\aleph_0$  insiemi  $\Sigma_m^0$ . È anche un banale esercizio di topologia vedere che essi formano una famiglia di aperti; e triviale è che esista una base di  $\Sigma_m^0$  numerabile, è  $\Sigma_m^0$  stesso.

Può essere però interessante osservare che anche le seguenti sono basi (numerabili) per le topologie  $\Sigma_m^0 \cap \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} \mathcal{B}_0 & = \text{base standard di } {}^\omega\omega \\ \mathcal{B}_m & = \left\{ \bigcap_{j \in \omega} \bigcup_{k \in \omega} B_{jk} \mid B_{jk} \in \mathcal{B}_{m-1} \right\} \end{cases}$$

Sono basi perchè ogni  $A \in \Sigma_m^0$  è della forma

$$A = \bigcup_{i \in \omega} \bigcap_{j \in \omega} A_{ij} = \bigcup_{i \in \omega} \left( \bigcap_{j \in \omega} \bigcup_{k \in \omega} B_{ijk} \right)$$

dove gli  $A_{ij} \in \Sigma_{m-1}^0$  e i  $B_{ijk} \in \mathcal{B}_{m-1}$ . □

*Dimostrazione.* (della proposizione 4.5) Dimostriamo solo il caso semplificato di insiemi  $A \subseteq \mathbb{R}^k$ .

Dimostriamo che  $\Sigma_m^i$  equivale a  $\Sigma_m^i(a)$  e che  $\Pi_m^i$  equivale a  $\Pi_m^i(a)$  procedendo per induzione su  $m$ .

**il caso  $\Sigma_1^0$ .**  $A \in \Sigma_1^0$  è un aperto di  $\mathbb{R}^k$ . Un punto  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^k$  sta in  $A$  sse esiste un aperto di base che sta in  $A$  e che lo contiene; l'aperto di base è della forma  $N_{s_{i_1}} \times \dots \times N_{s_{i_k}}$ ; e gli aperti di base sono numerabili, quindi posso considerare la funzione  $a \in {}^\omega\omega$  che li enumera,  $k$  per volta:

$$A(\mathbf{w}) \Leftrightarrow \exists^0 m (\mathbf{w} \in N_{s_{a(mk+0)}} \times \dots \times N_{s_{a(mk+k-1)}})$$

Gli aperti  $N_i$  e la funzione  $s_i$  sono definibili senza quantificatori, quindi questa è formula  $\Sigma_1^0(a)$ .

Viceversa, sia  $A \subseteq \mathbb{R}^k \Sigma_1^0(a)$ ; esiste una relazione  $R \in \Delta_0^0(a)$  per cui:

$$A(\mathbf{w}) \Leftrightarrow \exists^0 m R(m, \mathbf{w});$$

consideriamo allora gli insiemi  $R_m = \{\mathbf{w} \mid R(m, \mathbf{w})\}$ . Essendo  $R$  formula  $\Delta_0^0(a)$ , essa non può dipendere da tutto  $\mathbf{w}$  ma solo da  $\overline{\mathbf{w}}(q)$  per un qualche  $q \in \omega$ . E quindi ogni  $R_m$  è aperto: se  $\mathbf{w}$  la soddisfa, la soddisfa anche tutto l'aperto di base  $N_{\mathbf{w} \upharpoonright q}$ . Segue che è aperta anche la loro unione  $A$ .

**il caso  $\Sigma_m^0$  con  $m > 1$ .** Sia  $A \in \Sigma_m^0$ . In perfetta analogia col caso base,

$$A(\mathbf{w}) \Leftrightarrow \exists^0 m (\mathbf{w} \in B_{s_{a(mk+0)}} \times \dots \times B_{s_{a(mk+k-1)}}) \quad (*)$$

dove  $B_m = \{B_i \mid i \in \omega\}$  è la base sopra descritta per la topologia  $\Sigma_m^0 \cap \mathbb{R}$ . A differenza del caso base, questa base non è esprimibile in modo  $\Delta_0^0$  e ciò fa salire la complessità della formula (\*) fino a  $\Sigma_m^0(a)$ .

Viceversa, sia  $A \subseteq \mathbb{R}^k \Sigma_m^0(a)$ ; esiste una relazione  $R \in \Pi_{m-1}^0(a)$  per cui:

$$A(\mathbf{w}) \Leftrightarrow \exists^0 m R(m, \mathbf{w}).$$

Gli insiemi  $R_m = \{\mathbf{w} \mid R(m, \mathbf{w})\}$  sono  $\Pi_{m-1}^0(a)$ . Per ipotesi induttiva essi sono anche  $\Pi_{m-1}^0$  e quindi  $A$  è unione numerabile di  $\omega$  insiemi  $R_m \in \Pi_{m-1}^0$  cioè è  $\Sigma_m^0$ .

**il caso  $\Sigma_0^1$ .**  $\Sigma_0^1 = \Sigma_1^0$ , quindi per quanto già dimostrato  $A \in \Sigma_0^1$  equivale a dire che  $A$  è  $\Sigma_1^0(a)$  per un reale  $a$  opportuno. Cioè esiste una formula  $P \Delta_0^0(a)$  tale che per ogni  $\mathbf{w}$

$$A(\mathbf{w}) \Leftrightarrow \exists^0 m P(\mathbf{w}, m) \quad (*)$$

Chiaramente, questa è anche una formula  $\Sigma_0^1(a)$ , quindi se  $A \in \Sigma_1^0$  allora  $A$  è anche  $\Sigma_0^1(a)$ . Appena più difficile è dimostrare il viceversa; perchè se  $A \in \Sigma_0^1(b)$ ,

$$A(\mathbf{w}) \Leftrightarrow \exists^1 x R(\mathbf{w}, x)$$

per un'opportuna formula  $R$  aritmetica in  $b$ ; dobbiamo applicare la proposizione 4.3 per sapere che

$$A(\mathbf{w}) \Leftrightarrow \exists^1 x \exists^0 m \widehat{R}(m, \overline{\mathbf{w}}(m), \overline{x}(m)) \quad (**)$$

dove  $\widehat{R}$  è  $\Delta_0^0(b)$ , e poi definire un nuovo parametro  $a \in \mathbb{R}$  tale che  $(a)_0 = b$  e  $(a)_1 = x$ . Così abbiamo ricondotto la formula (\*\*) nella forma (\*), dimostrando che  $A$  è  $\Sigma_0^1$ .

il caso  $\Sigma_m^1$  con  $m > 1$ .

$$\begin{aligned}
A \in \Sigma_n^1 &\Leftrightarrow \exists B \in \Pi_{n-1}^1 \ A = pB \\
&\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} \exists B \in \Pi_{n-1}^1(a) \ A = pB \\
&\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} \exists B \in \Pi_{n-1}^1(a) \ \forall \mathbf{w} \ (A(\mathbf{w}) \Leftrightarrow \exists^1 x B(\mathbf{w}, x)) \\
&\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} \ A \in \Sigma_n^1(a).
\end{aligned}$$

il caso  $\Pi_m^i$ . Possiamo permetterci un'ipotesi induttiva leggermente più forte, cioè che ogni  $\Sigma_m^i$  sia equivalente ad un certo  $\Sigma_m^i(a)$ .

$$\begin{aligned}
B \in \Pi_m^i &\Leftrightarrow \exists A \in \Sigma_m^i \ (B = \mathbb{R}^k \setminus A) \\
&\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} \exists A \in \Sigma_m^i(a) \ (B = \mathbb{R}^k \setminus A) \\
&\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} \ B \in \Pi_m^i(a)
\end{aligned}$$

□

## 4.4 Alberi

La prossima idea importante della teoria descrittiva è quella di studiare un insieme associando degli ordinali ai suoi elementi. Questa costruzione è attribuita da Kanamori a Luzin e Sierpinski. La introduciamo qui perchè è necessaria per la dimostrazione di vari teoremi a riguardo delle gerarchie lightface e boldface.

**Definizione 4.8.** Un **albero** è un insieme parzialmente ordinato  $\langle T, < \rangle$  tale che per ogni  $t \in T$  l'insieme dei predecessori di  $t$  è ben ordinato da  $<$ :

$$\forall t \in T \ (\langle \{u \in T \mid u < t\} \rangle \text{ è buon ordine})$$

Essendo la relazione già un ordine parziale, significa semplicemente che i predecessori di  $t$  sono confrontabili tra loro.

Le definizioni di livello, ramo, catena, anticatena, altezza, etc... sono quelle solite.

Gli alberi che utilizzeremo sono i seguenti:

**Definizione 4.9.** Per un qualsiasi  $Y$  e un qualsiasi  $k \in \omega$ ,  $T$  è un **albero su**  ${}^k\omega \times Y$  sse:

- (i)  $T \subseteq \bigcup_{m \in \omega} {}^k({}^m\omega) \times ({}^m Y)$ ; cioè i suoi elementi sono  $(k+1)$ -uple di funzioni su  $m$  con codominio opportuno.
- (ii)  $\langle f_0, \dots, f_k \rangle \in T \Rightarrow \forall^0 n \leq |f_0| \ (\langle f_0 \upharpoonright n, \dots, f_k \upharpoonright n \rangle \in T)$ .

Introduciamo la seguente relazione:

**Definizione 4.10.** Se  $f, g \in T$  e

$$f = \langle f_0, \dots, f_k \rangle \in {}^k({}^m\omega) \times ({}^mY) \quad g = \langle g_0, \dots, g_k \rangle \in {}^k({}^n\omega) \times ({}^nY)$$

allora la relazione di **inclusione componente per componente** è

$$f \subseteq^* g \Leftrightarrow (f_0 = g_0 \upharpoonright m \wedge \dots \wedge f_k = g_k \upharpoonright m)$$

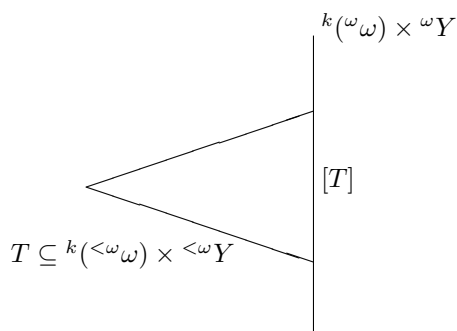
Un albero su  ${}^k\omega \times Y$  risulta essere un albero con la relazione di inclusione componente per componente.

L'albero ha altezza massima  $\omega$  e i suoi **livelli** sono:

$$\text{Lev}_m(T) = T \cap ({}^k({}^m\omega) \times {}^mY)$$

**Definizione 4.11.** Indichiamo  $[T]$  la **collezione dei rami infiniti** di  $T$ :

- (i)  $[T] \subseteq {}^k({}^\omega\omega) \times {}^\omega Y$ ;
- (ii)  $\langle t_0, \dots, t_k \rangle \in [T] \Leftrightarrow \forall^0 m (\langle t_0 \upharpoonright m, \dots, t_k \upharpoonright m \rangle \in T)$ .



**Definizione 4.12.**  $T$  è **ben fondato** se  $[T] = \emptyset$ .

Ossia l'albero non ha rami infiniti, ossia ancora l'altezza dell'albero è finita. Ciò coincide con la ben fondatezza della relazione inversa  $\supseteq^*$ . In questo senso, gli alberi di Kanamori sono 'rovesciati' rispetto agli alberi usuali, nei quali la ben fondatezza corrisponde alla ben fondatezza della relazione caratterizzante l'albero.

**Definizione 4.13.** Se  $\mathbf{w} = \langle x_0, \dots, x_{l-1} \rangle \in {}^l({}^\omega\omega)$ , dove  $0 \leq l \leq k$ , indichiamo  $T_{\mathbf{w}}$  la seguente **sezione** di  $T$ :

- (i)  $T_{\mathbf{w}}$  è albero su  ${}^{k-l}\omega \times Y$ ;
- (ii)  $\langle t_0, \dots, t_{k-l} \rangle \in T_{\mathbf{w}} \Leftrightarrow \exists^0 m (\langle x_0 \upharpoonright m, \dots, x_{l-1} \upharpoonright m, t_0, \dots, t_k \rangle \in T)$ .

Se  $\mathbf{w} = \langle x \rangle$  indichiamo anche  $T_{\mathbf{w}} = T_x$ .

**Notazione.** Utili saranno le operazioni di **concatenazione**:

$$\langle m_1, m_2, \dots \rangle \widehat{\ } \langle n_1, n_2, \dots \rangle = \langle m_1, m_2, \dots, n_1, n_2, \dots \rangle, \quad m_i, n_i \in \omega$$

e di **concatenazione componente per componente**:

$$\langle x_1, x_2, \dots \rangle \widehat{*} \langle y_1, y_2, \dots \rangle = \langle x_1 \widehat{\ } y_1, x_2 \widehat{\ } y_2, \dots \rangle, \quad x_i, y_i \in {}^{\leq \omega} \omega$$

Se  $T$  è albero su  ${}^k \omega \times Y$  e  $t \in \bigcup_{m \in \omega} {}^k(m\omega) \times ({}^m Y)$ , il seguente è il **sottoalbero** di radice  $t$ :

$$T/t := \{s \mid t \widehat{*} s \in T\}$$

**Lemma 4.14.** *Siano  $S, T$  alberi su  ${}^k \omega \times Y$ .*

- (i)  $T$  è ben fondato sse esiste un morfismo  $\rho : \langle T, \supseteq^* \rangle < \langle \text{On}, \in \rangle$  (cioè una funzione che preservi l'ordine).
- (ii) Esiste un morfismo  $S \rightarrow T$  sse  $T$  è mal fondato oppure  $\text{altezza}(S) \leq \text{altezza}(T)$ .

*Dimostrazione.*

- (i) È ovvio, vale per ogni relazione binaria: il morfismo è la funzione rango nella relazione  $\supseteq^*$ .
- (ii),  $\Rightarrow$ ) Siano  $f : S < T$  un morfismo,  $T$  ben fondata,  $\rho_T : T < \text{On}$ . Dobbiamo concludere che  $\text{altezza}(S) \leq \text{altezza}(T)$ . E infatti risulta che anche  $S$  è ben fondata, essendo  $\rho_T \circ f : S < \text{On}$ , ed affinché  $f$  possa preservare l'ordinamento l'altezza di  $S$  dovrà essere al massimo l'altezza di  $T$ .
- (ii),  $\Leftarrow$ ) Dimostriamo separatamente i due casi.

Se  $T$  è mal fondata scegliamo un ramo infinito e per ogni elemento  $n \in \omega$  mappiamo ogni elemento di  $\text{Lev}_n(S)$  nel corrispondente elemento fissato su  $\text{Lev}_n(T)$ ; la funzione preserva l'ordinamento.

Se invece  $\text{altezza}(S) \leq \text{altezza}(T)$ , possiamo assumere  $T$  ben fondato; e quindi anche  $S$  ben fondato. Procediamo per induzione sull'altezza di  $T$ . Per ogni  $\langle i \rangle \in S$ , il sottoalbero  $S/\langle i \rangle$  ha altezza minore; quindi esisterà un elemento  $t_i \in T$  tale che  $\text{altezza}(S/\langle i \rangle) \leq \text{altezza}(T/t_i) < \text{altezza}(T)$ . Per ipotesi induttiva fissiamo un morfismo  $f_i : S/\langle i \rangle < T/t_i$ . La funzione cercata sarà

$$f(s) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } s = \emptyset \\ t_i \widehat{\ } f_i(u) & \text{se } s = \langle i \rangle \widehat{\ } u \end{cases}$$

□

**Proposizione 4.15.** *Sia  $C \subseteq {}^k(\omega\omega) = \mathbb{R}^k$ .  $C$  è chiuso sse esiste un albero  $T$  su  ${}^k \omega$  tale che  $C = [T]$ .*

*Dimostrazione.*

⇒) Sia  $C$  chiuso; pongo:

$$T_C = \{(f_1 \upharpoonright m, \dots, f_k \upharpoonright m) \in {}^k(m\omega) \mid (f_1, \dots, f_k) \in C \wedge m \in \omega\}.$$

Per costruzione  $C \subseteq [T_C]$ ; proviamo il contrario.

Essendo  $C$  chiuso, il suo complementare è aperto, quindi

$$\forall y \in \mathbb{R}^k \setminus C \exists A \text{ aperto intorno di } y \ (A \cap C = \emptyset).$$

Posso scegliere come  $A$  un aperto di base  $A = N_{s_1} \times \dots \times N_{s_k}$ ;  $y \in A$  significa che le componenti  $y_i$  estendono le componenti  $s_i$ , magari su domini diversi  $m_i$ ; scegliendo il più piccolo dominio  $m$ ,

$$y \in N_{y_1 \upharpoonright m} \times \dots \times N_{y_k \upharpoonright m} \subseteq N_{s_1} \times \dots \times N_{s_k}$$

Chiamerò  $A_m^y$  il nuovo intorno di  $y$  trovato; vale

$$\forall y \in \mathbb{R}^k \setminus C \exists A \text{ aperto intorno di } y \ (A_m^y \cap C = \emptyset).$$

Per definizione di  $[T_C]$ ,  $y \notin [T_C]$ : altrimenti troverei un indice  $n$  per cui  $y \upharpoonright n \in T_C$ , ma  $y \in A_n$  e  $A_n \cap C = \emptyset$ , assurdo.

⇐) Viceversa se  $T$  è un albero su  ${}^k\omega$ ,  $C := [T]$  e  $x \notin C$ , mi serve trovare un intorno aperto di  $x$  disgiunto da  $C$ . Per definizione di  $[T]$ ,  $\exists m \in \omega(x \upharpoonright m \notin T)$ ; allora  $N_{x_1 \upharpoonright m} \times \dots \times N_{x_k \upharpoonright m} \cap [T] = \emptyset$ .

□

## 4.5 Alcuni risultati

Seguono alcuni risultati interessanti, senza dimostrazioni. Questi risultati esulano dagli scopi della presente tesi, e sono qui riportati unicamente per dare un'idea generale delle gerarchie lightface e boldface. Molte delle dimostrazioni possono essere trovate in Kanamori [1, §12-14].

**Proposizione 4.16** (Luzin, Suslin).

- (a) Ogni insieme analytic è Lebesgue misurabile;
- (b) Ogni insieme analytic gode della proprietà di Baire;
- (c) Ogni sottoinsieme analytic di  ${}^\omega\omega$  gode della p.s.p..

**Proposizione 4.17** (Luzin-Sierpinski). Ogni insieme  $\mathbf{\Pi}_1^1$  (e quindi ogni  $\mathbf{\Sigma}_1^1$ ) è sia unione sia intersezione di  $\aleph_1$  Boreliani.

**Proposizione 4.18** (Suslin [7]). Ogni insieme  $\mathbf{\Delta}_1^1$  è Borel e viceversa.

**Proposizione 4.19.**

$$\mathbf{\Delta}_n^1 \subsetneq \mathbf{\Delta}_{n+1}^1; \quad \mathbf{\Sigma}_n^1 \cup \mathbf{\Pi}_n^1 \subsetneq \mathbf{\Delta}_{n+1}^1.$$

**Proposizione 4.20** (Suslin-Luzin). *Ogni insieme  $\Sigma_1^1$  di reali gode della p.s.p..*

**Proposizione 4.21** (Gödel). ( $V=L$ )

- (a) *Esiste un insieme  $\Delta_2^1$  non Lebesgue misurabile.*
- (b) *Esiste un insieme  $\Pi_1^1$  che non gode della p.s.p..*
- (c) *Esiste un buon ordine  $\Sigma_1^1$  su  $\mathbb{R}$ .*

**Proposizione 4.22** (Mazurkiewicz).

$$\{f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R} \mid f \text{ è differenziabile}\} \in \Pi_1^1 \setminus \Sigma_1^1$$

**Proposizione 4.23** (Sierpinski). *Ogni insieme  $\Sigma_2^1$  è unione di  $\aleph_1$  Boreliani.*

**Proposizione 4.24.**

(a) *Per ogni  $n \in \omega$ ,*

$$\{(m, i, x) \in \omega \times \omega \times {}^\omega\omega \mid m = \ulcorner \varphi \urcorner \wedge (\varphi \text{ è formula } \Sigma_n) \wedge M_x \models \varphi[s_i]\}$$

*è aritmetico. Se  $n > 0$  esso è  $\Sigma_n^0$ .*

(b) *Sia  $\Phi \subseteq \omega$  un insieme di enunciati e  $\chi_\Phi \in {}^\omega 2$  la sua funzione caratteristica. Allora*

$$\{x \in {}^\omega\omega \mid M_x \models \Phi\}$$

*è  $\Delta_1^1(\chi_\Phi)$ .*

(c) *Se  $a \in {}^\omega\omega$  e  $M_a$  risulta ben fondata ed estensionale, allora*

$$\{(m, x) \in \omega \times {}^\omega\omega \mid \pi_a(m) = x\}$$

*è aritmetico in  $a$ .*

**Proposizione 4.25** (Gödel).  ${}^\omega\omega \cap L$  e  ${}^2({}^\omega\omega) \cap <_L$  sono insiemi  $\Sigma_2^1$ .

**Proposizione 4.26.** *Ipotizziamo  ${}^\omega\omega \subseteq L$ . Allora  ${}^2({}^\omega\omega) \cap <_L$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$   $\Delta_2^1$  non Lebesgue-misurabile e senza la proprietà di Baire.*

**Proposizione 4.27.** *Ipotizziamo  $\omega_1^L = \omega_1$ . Allora esiste un insieme di reali  $\Pi_1^1$  senza la p.s.p..*

Le precedenti ipotesi valgono — ad esempio — se  $V = L$ .

**Proposizione 4.28** (Suslin-Luzin). *Ogni insieme  $\Sigma_1^1$  di reali gode della p.s.p..*

**Proposizione 4.29** (Solovay). *Sia  $a \in {}^\omega\omega$ . Sono equivalenti:*

- (a) *Ogni insieme di reali  $\Sigma_2^1(a)$  gode della p.s.p.;*
- (b) *Ogni insieme di reali  $\Pi_1^1(a)$  gode della p.s.p.;*
- (c)  $\omega_1^{L[a]} < \omega_1$ .

## 4.6 Il teorema di absolutezza di Shoenfield

Le proposizioni seguenti forniscono una rappresentazione di insiemi proiettivi come alberi; li utilizzeremo per dimostrare un importante risultato di absolutezza dovuto a Shoenfield.

**Proposizione 4.30** (Luzin–Sierpinski, Kleene). *Sia  $a \in {}^\omega\omega$ ,  $A \subseteq {}^k({}^\omega\omega)$ . Allora  $A$  è  $\Pi_1^1(a)$  sse esiste un albero  $T$  su  ${}^k\omega \times \omega$  tale che per ogni  $\mathbf{w} \in {}^k({}^\omega\omega)$*

1.  $A(\mathbf{w}) \Leftrightarrow T_{\mathbf{w}}$  è ben fondato;
2. la relazione  $\{\langle i, \mathbf{w} \rangle \mid \langle s_i \rangle \in T_{\mathbf{w}}\}$  è ricorsiva in  $a$ .

*Dimostrazione.* Ricordiamo che  $\{s_i \mid i \in \omega\}$  è una enumerazione prefissata di  ${}^{<\omega}\omega$ ; osserviamo poi che

$$T_{\mathbf{w}} = \{\langle t \rangle \mid t \in {}^{<\omega}\omega \wedge \exists^0 n \langle w_0 \upharpoonright n, \dots, w_{k-1} \upharpoonright n, t \rangle \in T\}$$

$\Leftrightarrow$  In questo caso

$$A(\mathbf{w}) \Leftrightarrow \forall^1 y \exists^0 i \exists^0 n (s_i = y \upharpoonright n \wedge \langle s_i \rangle \notin T_{\mathbf{w}}),$$

che è formula  $\Pi_1^1(a)$ .

$\Rightarrow$ ) Per semplicità consideriamo  $k = 1$ ,  $\mathbf{w} = x \in {}^\omega\omega$ . Come già osservato, in una formula con quantificatori funzionali è possibile ridurre i quantificatori numerici ad uno solo; nel nostro caso, essendo  $A$  formula  $\Pi_1^1(a)$ :

$$A(x) \Leftrightarrow \forall^1 y \exists^0 m R(m, \bar{x}(m), \bar{y}(m))$$

dove  $R$  è relazione ricorsiva in  $a$ . L'albero  $T$  su  $\omega \times \omega$  cercato è:

$$T = \{\langle s, t \rangle \mid \forall^0 l \leq |s| \neg R(l, \bar{s}(l), \bar{t}(l))\}$$

Infatti, tenendo presente che  $T_x = \{\langle t \rangle \mid \exists^0 n \langle x \upharpoonright n, t \rangle \in T\}$ ,

$$\begin{aligned} & T_x \text{ è ben fondato} \\ \Leftrightarrow & \forall^1 y \exists^0 m (\langle y \upharpoonright m \rangle \notin T_x) \\ \Leftrightarrow & \forall^1 y \exists^0 m \forall^0 n (\langle x \upharpoonright n, y \upharpoonright m \rangle \notin T) \\ \Leftrightarrow & \forall^1 y \exists^0 m \forall^0 n \exists^0 l \leq n \neg R(l, \bar{x}(l), \bar{y}(l)) \\ \Leftrightarrow & \forall^1 y \exists^0 m \forall^0 n \exists^0 l (m \leq l \leq n \wedge R(l, \bar{x}(l), \bar{y}(l))) \\ \Leftrightarrow & \forall^1 y \exists^0 m \neg R(l, \bar{x}(m), \bar{y}(m)) \\ \Leftrightarrow & A(x) \end{aligned}$$

Osserviamo che  $T$  è definito da una relazione ricorsiva in  $a$ ; e poichè  $\langle s_i \rangle \in T_x$  sse  $\langle x \upharpoonright |s_i|, s_i \rangle \in T$ , anche la relazione  $\{\langle i, x \rangle \mid \langle s_i \rangle \in T_x\}$  è ricorsiva in  $a$ .

□

In casi particolari la proposizione ha una formulazione equivalente.

**Definizione 4.31.** Chiamiamo **ordinamento di Kleene-Brouwer** il seguente ordine lineare su  ${}^{<\omega}\text{On}$ :

$$s <_{\text{KB}} t \Leftrightarrow (s \supset t) \vee (\exists i \forall j < i \ s(j) = t(j) \wedge s(i) < t(i))$$

**Lemma 4.32.** Un albero  $T$  su  $\gamma \in \text{On}$  è ben fondato sse è ben ordinato da  $<_{\text{KB}}$ .

*Dimostrazione.* Se  $T$  non è ben fondato basta prendere un ramo infinito: è catena discendente secondo l'ordinamento KB, e quindi KB non è un buon ordine.

Viceversa, sia  $T$  non bene ordinato da  $<_{\text{KB}}$ : esiste una catena infinitamente discendente  $\langle t_i \mid i \in \omega \rangle$ ; guardando la definizione dell'ordinamento, non posso diminuire a piacere un prefissato elemento  $t_k(i)$  perchè  $\omega$  è ben fondato, quindi devo aumentare indefinitamente la lunghezza delle funzioni  $t_i$ ; e dunque  $T$  ha un ramo infinito.  $\square$

**Corollario 4.33.** Se  $T$  è albero su  $\gamma \in \text{On}$ , nella proposizione 4.30 possiamo scrivere:

$$A(x) \Leftrightarrow <_{\text{KB}} \text{ ben ordina } T_x$$

**Definizione 4.34.** Fissato un insieme  $Y$ ,  $A \subseteq {}^k(\omega^\omega)$  è detto  **$Y$ -Suslin** se esiste un albero  $T$  su  ${}^k\omega \times Y$  tale che  $A = p[T]$ .

Osserviamo che

$$\begin{aligned} A = p[T] &\Leftrightarrow \forall \mathbf{w} (A(\mathbf{w}) \Leftrightarrow [T_{\mathbf{w}}] \neq \emptyset) \\ &\Leftrightarrow \forall \mathbf{w} (A(\mathbf{w}) \Leftrightarrow T_{\mathbf{w}} \text{ è mal fondata}). \end{aligned}$$

**Proposizione 4.35.** Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^k$

1.  $A$  è  $Y$ -Suslin sse  $A$  è  $|Y|$ -Suslin;
2.  $A$  è  $2^\omega$ -Suslin;
3.  $A \in \Sigma_1^1$  sse è  $\omega$ -Suslin;
4. Se  $A$  è  $\kappa$ -Suslin, anche  $pA$  lo è;
5. Se ogni  $A_\xi$  con  $\xi < \kappa$  è  $\kappa$ -Suslin, anche  $\bigcup_\xi A_\xi$  lo è;
6. (Martin)  $A$  è  $\omega_n$ -Suslin sse è unione di  $\omega_n$  Boreliani.

**Proposizione 4.36** (Shoenfield). Se  $A \subseteq {}^k(\omega^\omega)$  è  $\Sigma_2^1(a)$  e  $a \in {}^\omega\omega$ , esiste un albero  $U \in L[a]$  su  ${}^k\omega \times \omega_1$  tale che  $A = p[U]$ .

In particolare, ogni insieme  $\Sigma_2^1$  è  $\omega_1$ -Suslin.

*Dimostrazione.* Per iniziare verifichiamo il risultato nel caso  $A \in \Pi_1^1(a)$ . Ci limitiamo a dimostrare il caso  $k = 1$ .

Grazie alla proposizione 4.30 possiamo fissare un albero  $T \in L[a]$  su  $\omega \times \omega$  tale che per ogni  $x$

$$\begin{aligned} A(x) &\Leftrightarrow T_x \text{ è ben fondato} \\ &\Leftrightarrow \exists g (g : T_x \rightarrow \omega_1 \text{ preserva l'ordine}) \end{aligned}$$

L'ultima equivalenza vale grazie al lemma 4.14. Definiamo un nuovo albero su  $\omega \times \omega_1$ :

$$U := \{\langle t, u \rangle \mid \forall i, j < |t| (s_i \supset s_j \wedge \langle t \upharpoonright |s_i|, s_i \rangle \in T \Rightarrow u(i) < u(j))\}$$

Ricordiamo che  $|s_i| \leq i$ ; in pratica una coppia  $\langle t, u \rangle$  è ammessa in  $U$  sse  $u$  definisce un morfismo  $u'$  tra il seguente sottoalbero di  $T$ :

$$T^{(t)} = \{\langle t \upharpoonright |b|, b \rangle \in T \mid |b| < |t|\}$$

e  $\omega_1$ :

$$u' : \begin{array}{l} \langle T^{(t)}, \supset \rangle < \langle \omega_1, < \rangle \\ \langle t \upharpoonright m, b \rangle \mapsto u(m) \end{array}$$

Intendiamo dimostrare che  $A = p[U]$ . Infatti, per  $x \in {}^\omega\omega$ ,

$$\begin{aligned} x \in p[U] &\Leftrightarrow \exists g \in {}^\omega\omega_1 (\langle x, g \rangle \in [U]) \\ &\Leftrightarrow \exists g \in {}^\omega\omega_1 \forall n \langle x \upharpoonright n, g \upharpoonright n \rangle \in U \\ &\Leftrightarrow \exists g \in {}^\omega\omega_1 \forall n \ g \upharpoonright n \text{ definisce un morfismo } T^{(x \upharpoonright n)} \rightarrow \omega_1 \\ &\Leftrightarrow \exists g \in {}^\omega\omega_1 \text{ definisce un morfismo } T_x \rightarrow \omega_1 \\ &\Leftrightarrow A(x) \end{aligned}$$

Il penultimo passaggio vale perchè  $T_x = \bigcup_{n \in \omega} T^{(x \upharpoonright n)}$ .

Passiamo quindi al caso  $A \subseteq \mathbb{R}^k$ ,  $A \in \Sigma_2^1(a)$ :  $A = pB$  dove  $B \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$ ,  $B \in \Pi_1^1(a)$ , e  $B = p[U]$  per un opportuno albero  $U$  su  ${}^{k+1}\omega \times \omega_1$ . Allora posso trasformare  $U$  in  $U'$ , albero su  ${}^k\omega \times (\omega \times \omega_1)$  e  $A = p[U']$ . Notiamo che  $\omega \times \omega_1 \xrightarrow{\sim} \omega_1$ , quindi  $U'$  soddisfa la tesi.  $\square$

**Teorema 4.37** (Shoenfield). *Esiste un teorema  $\hat{\sigma}$  di ZF tale che per ogni  $a \in {}^\omega\omega$  e per ogni  $M \in$ -modello transitivo di  $\hat{\sigma}$  con  $\omega_1 \cup \{a\} \subset M$  ogni relazione  $\Sigma_2^1(a)$  (e quindi ogni relazione  $\Pi_2^1(a)$ ) è assoluta per  $M$ .*

Non è invece richiesto che  $M$  sia modello interno di ZF, per quanto come vedremo la dimostrazione risulterebbe più semplice. A noi basterà una versione semplificata del precedente teorema:

**Corollario 4.38.** *Per ogni  $M \in$ -modello transitivo di ZF che contenga  $\omega_1$  ogni relazione  $\Sigma_2^1$  (e quindi ogni relazione  $\Pi_2^1$ ) è assoluta per  $M$ . In particolare questo vale per  $L$ .*

*Dimostrazione.* Il corollario discende direttamente dalla proposizione 4.5.

Dimostriamo il teorema solo nel caso  $k = 1$ :

$$A(x) \Leftrightarrow \exists^1 y \forall^1 z \exists^0 m R(m, \bar{x}(m), \bar{z}(m))$$

Inoltre iniziamo a dimostrare il teorema nel caso semplificato  $M \models \text{ZFC}$ .

$A^M(x) \rightarrow A(x)$  Grazie alla proposizione 4.30, per ogni  $y$  esiste un albero  $T(y)$  su  $\omega \times \omega$  tale che

$$\begin{aligned} A(x) &\Leftrightarrow \exists^1 y (T(y)_x \text{ è ben fondato}) \\ &\Leftrightarrow \exists^1 y (T_{\langle x, y \rangle} \text{ è ben fondato}) \end{aligned}$$

dove il nuovo albero  $T$  è su  ${}^2\omega \times \omega$ . La definizione di  $T$  è  $\Delta_0^0$  (cfr. prop. 4.30) e quindi possiamo assumere  $T^M = T$ . Per ogni  $x \in M$ :

$$\begin{aligned} A^M(x) &\Leftrightarrow \exists y \in {}^\omega\omega \cap M (T_{\langle x, y \rangle} \text{ è ben fondato})^M \\ &\Leftrightarrow \exists y \in {}^\omega\omega \cap M (\exists \rho : T_{\langle x, y \rangle} < \text{On})^M \\ &\Rightarrow \exists y \in {}^\omega\omega \cap M (\exists \rho : T_{\langle x, y \rangle} < \text{On}) \\ &\Rightarrow \exists y \in {}^\omega\omega (T_{\langle x, y \rangle} \text{ è ben fondato}) \\ &\Leftrightarrow A(x). \end{aligned}$$

$A(x) \rightarrow A^M(x)$  Grazie alla proposizione 4.36 esiste un albero  $U$  su  $\omega \times \omega_1$  tale che

$$\begin{aligned} A(x) &\Leftrightarrow \exists z \in {}^\omega\omega_1 \langle x, z \rangle \in [U] \\ &\Leftrightarrow U_x \text{ è mal fondato} \\ &\Leftrightarrow \nexists g (g : U_x < \text{On}) \\ &\Leftrightarrow (\nexists g (g : U_x < \text{On}))^M \\ &\Leftrightarrow (U_x \text{ è mal fondato})^M \\ &\Leftrightarrow A(x)^M \end{aligned}$$

Se invece  $M \not\models \text{ZFC}$ , Kanamori osserva che le proposizioni 4.14 e 4.36 non dipendono da DC; quello che serve invece è che  $U$  sia classe definibile in  $M$ , per la qual cosa basta aggiungere l'ipotesi  $\omega_1 \subseteq M$ . Fatte queste osservazioni, si dovrebbe riuscire a dimostrare che non è necessario tutto ZF ma solo un suo teorema  $\hat{\sigma}$  sufficientemente potente.

□

## 4.7 Complessità di $0^\#$

**Proposizione 4.39** (Solovay, Silver). (ZF) *La relazione  $R$  su  ${}^\omega\omega$ :*

$$R(x) \Leftrightarrow x \text{ è la funzione caratteristica di } 0^\#$$

*è insieme  $\Pi_2^1$ .*

*Dimostrazione.* Ricordiamo che  $0^\# \subseteq \text{Form}_{\mathcal{L}^*} \subseteq \omega$  è quell'unico carattere che soddisfa le condizioni (I) – (II) – (III). Se  $x = \chi_\Phi \in {}^\omega 2$  è la funzione caratteristica di un insieme di formule  $\Phi \subseteq \text{Form}_{\mathcal{L}^*}$ , possiamo definire:

$$\text{Th}_x = x^{-1}(1) = \Phi$$

Definiamo quindi la relazione  $S$  su  ${}^\omega\omega$ :

$$S(x) \Leftrightarrow \begin{cases} (i) & x \in {}^\omega 2 \\ (ii) & \exists \Phi \subseteq \text{Form}_{\mathcal{L}^*}(\text{Th}_x = \Phi), \quad \text{o equivalentemente } x = \chi_\Phi \\ (iii) & \text{Th}_x \text{ è teoria consistente e completa} \\ (iv) & \text{Th}_x \text{ contiene l'enunciato } \sigma_0 \text{ previsto dal lemma 1.11} \\ & \text{(e richiamata sotto)} \\ (v) & \text{Th}_x \text{ contiene gli enunciati necessari perchè i } c_i \\ & \text{siano indiscernibili} \\ (vi) & \text{Th}_x \text{ contiene gli enunciati necessari per soddisfare (II) e (III)} \end{cases}$$

Ricordiamo che  $\sigma_0$  è quell'enunciato di  $\mathcal{L}^*$  tale che per ogni classe transitiva  $N$ ,

$$\langle N, \in \rangle \models \sigma_0 \Leftrightarrow (N = L \vee \exists \delta \text{ ordinale limite tale che } N = L_\delta)$$

A questo punto

$$R(x) \Leftrightarrow S(x) \wedge \text{Th}_x \text{ è carattere} \wedge \text{Th}_x \text{ soddisfa (I)}$$

Si dimostra facilmente che  $S$  è aritmetica, cioè non sono necessari quantificatori funzionali per definirla.

Notiamo che  $S(x)$  implica che  $\text{Th}_x$  è completa e consistente, e quindi ammette un modello infinito. Si può applicare la proprietà 2.2 per concludere che essa ammette anche un modello con un insieme di indiscernibili prestabilito qualsiasi.

Ricordiamo ora che ad ogni relazione  $E$  su  $\omega$  corrisponde almeno un  $y \in {}^\omega\omega$  per cui  $E = E_y$ ; e analogamente ogni modello  $M = \langle \omega, E \rangle$  è un  $M_y = \langle \omega, E_y \rangle$ . Indichiamo temporaneamente  $\mathcal{M}(T, r)$  il modello  $\mathcal{M}_\alpha$  relativo alla teoria  $T$  con insieme di indiscernibili di tipo d'ordine  $r$  previsto dal lemma 2.8.

Allora:

$$R(x) \Leftrightarrow S(x) \wedge \forall^1 y \forall^1 z \\ ((E_y \text{ è buon ordine} \wedge M_z = \mathcal{M}(\text{Th}_x, E_y)) \Rightarrow M_z \text{ è ben fondata})$$

Tale condizione (che è in effetti la (I)) è sufficiente perchè  $\text{Th}_x$  sia anche un carattere: per quanto detto prima esiste un modello  $M_z$  che ammette un insieme di indiscernibili; la proprietà (I) mi garantisce che è ben fondato; allora posso considerare il suo collasso transitivo, che è ancora modello di  $\text{Th}_x$ , ed applicare  $\sigma_0$  per concludere che esso è un  $L_\delta$  (e non  $L$  perchè sarebbe classe propria); e quindi  $\text{Th}_x$  è un carattere.

Per quanto riguarda le altre asserzioni che compongono  $R(x)$ , l'essere buon ordine è  $\Pi_1^1$ ,  $M_z = \mathcal{M}(\text{Th}_x, E_y)$  è  $\Sigma_1^1$  e l'essere classe ben fondata è nuovamente  $\Pi_1^1$ ; dunque  $R$  è  $\Pi_2^1$ . Giustificiamo le ultime affermazioni: per dire che  $E_y$  è buon ordine diciamo che

$$E_y \text{ è ordine lineare} \wedge \forall^1 f \exists^0 n \neg f(n+1) E_y f(n)$$

e la prima parte dell'enunciato è aritmetica. Dire che  $M_z$  è ben fondata è analogo, occorre scrivere la ben fondatezza dell'inclusione. Infine,  $M_z$  soddisfa il 2.8 se:

$$\exists^1 f (\text{im}(f) \subseteq \text{On}^{M_z} \wedge \forall^0 a, b \forall^0 \varphi \forall^0 n \forall^0 y_1 \dots y_n ( \\ (a E_y b \Leftrightarrow f(a) < f(b)) \wedge (\varphi \in \text{Form}_{\mathcal{L}^*}) \wedge y_1 \dots y_n \in \text{im}(f) \Rightarrow \\ (M_z \models \varphi[y_1, \dots, y_n] \Leftrightarrow \text{Th}_x \models \varphi(c_0, \dots, c_n))))))$$

in cui l'ultima parte è aritmetica, è l'equivalenza tra l'enunciato

$$\begin{aligned} \exists \psi, \chi \in \text{Form} ((\varphi \text{ è } \psi \wedge \chi) \wedge M_z \models \psi \wedge M_z \models \chi) \vee \exists \psi \in \text{Form} \\ ((\varphi \text{ è } \neg \psi) \wedge \neg M_z \models \psi) \vee \dots \vee \exists a, b \in \text{Vbl} ((\varphi \text{ è } a \in b) \wedge aE_z b) \end{aligned}$$

e l'enunciato

$$x(\ulcorner \varphi(c_0, \dots, c_{n-1}) \urcorner) = 1$$

□

**Corollario 4.40.**

- (a)  $0^\#$  è insieme  $\Delta_3^1$
- (b)  $0^\#$  è assoluto per modelli  $M$  transitivi di ZF con  $\omega_1 \subseteq M$ .
- (c)  $0^\# \notin L$
- (d) ( $\exists 0^\#$ ) Ogni  $x \in \mathcal{P}(\omega)^L$  è  $\Delta_3^1$  e anzi è controimmagine di  $0^\#$  mediante un'opportuna funzione iniettiva e ricorsiva  $f : \omega \rightarrow \omega$ .

*Dimostrazione.*

- (a)  $\forall x (x \in 0^\# \Leftrightarrow \exists^1 y (R(y) \wedge y(x) = 1) \Leftrightarrow \forall^1 y (R(y) \rightarrow y(x) = 1))$ .
- (b) Essendo  $R$  relazione  $\Pi_2^1$ , segue direttamente dal corollario 4.38.
- (c) Se per assurdo  $0^\# \in L$ , per absolutezza  $L \models \exists 0^\#$ ; ma allora  $L \models (V \neq L)$  che dai corsi di logica sappiamo essere falso.
- (d) Fissato  $x \in \mathcal{P}(\omega)^L$ , grazie all'ipotesi esiste un termine di Skolem  $h$  ed esistono indici  $\xi_1, \dots, \xi_n$  per cui  $x = h(i_{\xi_1}, \dots, i_{\xi_n})$ . Allora la relativa funzione  $f$  è

$$f(y) = \ulcorner y = h(c_1, \dots, c_n) \urcorner$$

Tale funzione è chiaramente iniettiva; è ricorsiva perchè tali sono le formule che definiscono la codifica. Mostriamo che  $f^{-1}(0^\#) = x$ :

$$y \in x \Leftrightarrow L \models y \in h(c_1, \dots, c_n) \Leftrightarrow \ulcorner y \in h(c_1, \dots, c_n) \urcorner \in 0^\#$$

□



## Capitolo 5

# Giochi infiniti

Iniziamo con l'introdurre la nozione di gioco infinito. L'assioma  $\exists 0^\#$  entrerà in relazione con la determinatezza o meno di particolari giochi infiniti.

Dal punto di vista insiemistico è possibile descrivere un gioco puramente in termini di insiemi e funzioni; tuttavia per poter immaginare meglio la situazione è conveniente utilizzare terminologia ed immagini della teoria dei giochi.

Sia  $X$  un insieme non vuoto,  $A \subseteq {}^\omega X$ . Descriveremo ora un **gioco infinito a due giocatori e con informazione perfetta** avente  $X$  come insieme delle mosse e  $A$  come insieme *payoff* per il giocatore I; tale gioco verrà indicato  $G_X(A)$ .

Gli **avversari** saranno indicati rispettivamente I e II. All'inizio I sceglie un elemento  $x(0) \in X$ ; II risponde con  $x(1) \in X$ . Quindi I gioca  $x(2)$  e II ribatte con  $x(3)$  e così via. Graficamente:

$$\begin{array}{ccccccc} I & x(0) & & x(2) & & \dots & \\ II & & x(1) & & x(3) & & \end{array}$$

La definizione di **mossa** non è univoca; per noi una mossa è il singolo elemento di  $X$  (per altri è invece il punto d'arrivo in  ${}^{<\omega} X$ ).

Il gioco è univocamente determinato dalla sequenza  $x \in {}^\omega X$  delle mosse, che chiameremo **partita**.

La **vittoria** è del giocatore I se  $x \in A$ , altrimenti è del giocatore II.

È molto comodo utilizzare le seguenti notazioni:

- $x_I(n) = x(2n)$  sono le mosse di I;
- $x_{II}(n) = x(2n + 1)$  sono le mosse di II;
- date due sequenze  $x, y \in {}^\omega X$  (che rappresentano le giocate di I e II),  $x * y$  è la partita risultante:

$$\begin{array}{lcl} x * y(2n) & = & x(n) \\ x * y(2n + 1) & = & y(n) \end{array} .$$

Il gioco è chiamato **a conoscenza perfetta** perchè ogni giocatore ad ogni turno è al corrente di tutte le mosse effettuate dal suo avversario nei turni precedenti.

Una **strategia** è quindi una funzione che permetta ad un giocatore di decidere quale mossa fare in funzione delle mosse precedenti sia sue che dell'avversario; per l'esattezza, distinguiamo una strategia per I, che è una funzione:

$$\sigma : \bigcup_{n \in \omega} {}^{2n} X \rightarrow X$$

da una strategia per II, che è una funzione:

$$\tau : \bigcup_{n \in \omega} {}^{2n+1}X \rightarrow X$$

Utilizzeremo il simbolo  $*$  anche per le strategie nella maniera intuitiva; la partita  $\sigma * \tau$  è:

$$\begin{array}{llll} I & \sigma(\emptyset) & \sigma(\sigma(\emptyset), \tau(\sigma(\emptyset))) & \dots \\ II & \tau(\sigma(\emptyset)) & \tau(\sigma * \tau \upharpoonright 3) & \end{array}$$

Un elemento  $y \in {}^\omega X$  può essere visto come strategia indipendente dalle mosse dell'avversario, quindi hanno senso le scritture  $\sigma * y$  e  $y * \tau$ , nonché la precedente  $x * y$ . Formalmente:

$$\begin{cases} \sigma * \tau(2n) & = \sigma(\sigma * \tau \upharpoonright (2n)) \\ \sigma * \tau(2n+1) & = \tau(\sigma * \tau \upharpoonright (2n+1)) \end{cases}$$

Diremo che  $\sigma$  è una **strategia vincente per I** se I, utilizzando tale strategia, vince indipendentemente dalla strategia dell'avversario:

$$\{\sigma * y \mid y \in {}^\omega X\} \subseteq A$$

e analogamente  $\tau$  è **strategia vincente per II** se

$$\{z * \tau \mid z \in {}^\omega X\} \cap A = \emptyset$$

Infine, il gioco  $G_X(A)$  si dice **determinato** se uno dei due giocatori ha una strategia vincente; è evidente dalle definizioni che solo uno dei due può averne una.

Introduciamo un'ulteriore notazione utile: se  $A \subseteq {}^\omega X$ ,  $s \in <{}^\omega X$ , indico

$$A/s := \{x \in {}^\omega X \mid s \frown x \in A\}.$$

Se il gioco iniziale era  $G_X(A)$ , e le prime  $|s|$  mosse sono quelle descritte da  $s$ , possiamo dire che il gioco è cambiato: il nuovo gioco è appunto  $G_X(A/s)$ .

**Osservazione 5.1.** Se un giocatore non ha una strategia vincente in  $G_X(A)$ , per ogni mossa  $a$  di I esiste una mossa  $b$  di II per cui I continua a non avere una strategia vincente; ossia I non ha strategia vincente in  $G_X(A/\langle a, b \rangle)$ . II ha quindi una strategia 'minimale', usando la quale I non ha mai una strategia vincente; ma nessuno garantisce che tale strategia sia vincente.

**Osservazione 5.2.** Ad ogni  $y$  corrisponde una partita  $\sigma * y$  differente; quindi  $\{\sigma * y \mid y \in {}^\omega X\}$  ha cardinalità  $|X|^\omega$  e se  $|A| < |X|^\omega$  il giocatore I non può avere una strategia vincente.

Analogamente anche  $|\{z * \tau \mid z \in {}^\omega X\}| = |X|^\omega$  quindi se  $|{}^\omega X \setminus A| < |X|^\omega$  il giocatore II non può avere una strategia vincente.

Nel caso di giochi su  $\omega$  possiamo dire di più:

**Lemma 5.3.** Sia  $A \subseteq {}^\omega \omega$ ,  $|A| < 2^{\aleph_0}$ ; allora II ha una strategia vincente per  $G_\omega(A)$ .

*Dimostrazione.* A partire dall'insieme  $A$  costruiamo un nuovo insieme, diciamo  $B$ , nel seguente modo:

$$B := \{x_{II} \mid x \in A\},$$

cioè estraggo solo le sequenze che deve giocare II per arrivare in  $x$ . Ma  $|B| \leq |A| < 2^{\aleph_0}$ , quindi c'è almeno una sequenza  $y \notin B$  che II può giocare con la sicurezza di vincere.  $\square$

**Osservazione 5.4.** Notiamo tuttavia che dal punto di vista insiemistico è sufficiente porre  $G_X(A) = (X, A)$ . Di più, nei casi più comuni  $X = \omega$ ; allora si può identificare  $G_\omega(A) = A \subseteq {}^\omega\omega$ .

Con queste notazioni, ha senso dire che un insieme  $A \subseteq {}^\omega\omega$  è **determinato** se lo è il gioco  $G_\omega(A)$ .

## 5.1 Assiomi di determinatezza

Introduco a questo punto alcune notazioni che ci saranno utili nei prossimi teoremi. Sottolineiamo però che cronologicamente tali notazioni sono posteriori ai suddetti teoremi.

- (Det( $\mathcal{A}$ )) Ogni elemento di  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$  è determinato.
- (AD) Det( $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ), cioè ogni insieme di reali è determinato.
- (PD) Det( $\bigcup_{n \in \omega} \Pi_n^1$ )

L'enunciato Det( $X$ ) viene in generale chiamato *determinatezza di  $X$* ; AD è *l'assioma di determinatezza* e PD la *determinatezza degli insiemi proiettivi*<sup>1</sup>.

## 5.2 Varianti del gioco

Il gioco viene detto **infinito** perchè è in effetti un caso particolare di un gioco più generale. Nella sua forma originale — ad esempio in Martin — il gioco era  $G(T; A)$  dove  $T$  è un albero. I rami di  $T$  — infiniti o no — sono tutte le partite possibili. L'insieme payoff è un sottoinsieme non di  $[T]$  bensì dell'insieme di tutti i rami dell'albero, che possiamo indicare  $[T]_M$  (Martin invece usa il simbolo  $[T]$  per indicare quest'ultimo).

Se  $T = {}^{<\omega}X$  allora il gioco è riconducibile al nostro,  $G(T; A) = G_X(A)$ ; se al contrario l'albero è ben fondato il gioco si dirà **finito**.

Esistono molti altri giochi, non tutti riconducibili a questo schema. Rimandiamo a Borel[6] e Mazur (non mi risulta però che lo *Scottish Book* di Mazur sia stato pubblicato).

Ne citiamo due, che sono varianti del gioco  $G_X(A)$  sopra descritto.

Indichiamo  $G_X^*(A)$  il gioco in cui lo spazio delle mosse possibili per II è ancora  $X$  mentre lo spazio delle mosse per I è  ${}^{<\omega}X \setminus \{\emptyset\}$ ; è come se al giocatore I venisse permesso di svolgere ad ogni suo turno un numero arbitrario di mosse

<sup>1</sup>Nell'originale: *projective determinacy*.

di  $X$ . Se indico  $s_i$  le funzioni giocate da I e  $k_i$  gli elementi giocati da II, la partita è univocamente determinata dalla funzione

$$x = s_0 \langle k_0 \rangle \_ s_1 \langle k_1 \rangle \_ \dots \in {}^\omega \omega$$

dove  $\langle k \rangle$  è la funzione  $0 \mapsto k$  e  $\_$  è l'operatore di concatenazione tra funzioni finitarie su  $\omega$ . La terminologia è poi analoga a quella utilizzata per  $G_X(A)$ .

Indichiamo con  $G_X^{**}(A)$  il gioco in cui lo spazio delle mosse è per ambo i giocatori  ${}^{<\omega} X \setminus \{\emptyset\}$ ; se  $s_i$  sono le funzioni giocate da I e  $t_i$  quelle giocate da II la partita è univocamente determinata da

$$x = s_0 t_0 \_ s_1 t_1 \_ \dots \in {}^\omega \omega$$

Quest'ultimo è il gioco cui fa riferimento Mazur nello *Scottish Book*.

Un terzo gioco è il *covering game* di Harrington per il quale rimandiamo a Kanamori [1, 27.7].

### 5.3 Alcuni risultati

Riportiamo qui alcune costruzioni ed alcuni risultati della teoria dei giochi, senza dimostrazioni. Tali dimostrazioni si trovano quasi tutte nel testo di Martin [10] e in quello di Kanamori [1].

Imponiamo su  $X$  la **topologia discreta**, su  ${}^\omega X$  la topologia prodotto. Ricordiamo che in questo modo la topologia prodotto è quella che ha per base degli aperti gli insiemi

$$N_s = \{f \in {}^\omega X \mid s \subseteq f\}$$

al variare di  $s \in {}^{<\omega} X$ .

Osserviamo che il lavoro di **Martin** — che studia giochi su un albero  $T$  anzichè su  ${}^{<\omega} X$  — necessita invece di opportune generalizzazioni. Lo spazio topologico non è  $\mathbb{R}$  ma

$$[T]_M := \{\text{tutte le partite in } T\};$$

una base degli aperti è data, analogamente al caso reale, dai  $[T/p]_M$ .

Lo spazio risultante, seppur metrico completo, non è separabile. Inoltre cambiano le definizioni di gerarchie lightface e boldface, che raggruppano i sottoinsiemi di  $[T]_M$  e non di  $\mathbb{R}$ .

È comprensibile quindi che Martin giunga ad alcuni risultati differenti dai nostri. In particolare, diventa falsa la proposizione 4.18: la classe  $\Delta_1^1$  è per lui più vasta dei Boreliani, ed è da lui chiamata classe dei *quasi-Boreliani*.

**Proposizione 5.5** (Zermelo, 1913). (AC) *Se  $T$  è un albero privo di rami infiniti, ogni gioco  $G(T; A)$  è determinato.*

**Proposizione 5.6** (Zermelo, 1913). (AC) *Se  $A \subseteq {}^\omega X$  è clopen,  $G_X(A)$  è determinato.*

**Proposizione 5.7** (Hugo Steinhaus, Banach, Stanislaw, Mazur, 1925). (AC) *Esistono giochi  $G_X(A)$  non determinati.*

Questo risultato è ancora piuttosto primitivo, in seguito è stato raffinato. Ad esempio, si osserva che l'ipotesi AC è superflua (cfr. proposizione 5.11): in ZF si dimostra che non tutti i giochi infiniti su  $X = \aleph_1$  possono essere determinati. E lo stesso vale per i giochi su un cardinale  $X = \kappa \geq \aleph_1$ , oppure su  $X = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ . Tuttavia non si riesce a dimostrare lo stesso risultato per  $X = \mathbb{R}$  senza utilizzare AC (cfr. proposizione 5.9).

**Proposizione 5.8** (Gale-Stewart, 1953). (AC) *Se  $A \subseteq {}^\omega X$  è aperto oppure chiuso,  $G_X(A)$  è determinato.*

*Dimostrazione.* Sia  $A \subseteq {}^\omega \omega$  aperto. Immaginiamo che I non abbia strategia vincente; come già osservato (5.1) il giocatore II ha una strategia *minimale*. Dobbiamo dimostrare che in questo caso essa è vincente.

Consideriamo una partita vinta da I,  $x \in A$ ;  $A$  è aperto, quindi  $x \in A$  sse esiste un aperto di base  $N_{x \upharpoonright 2n} \subseteq A$ ; ma allora, quale che sia la strategia di II, una volta entrati nel cono di  $x \upharpoonright 2n$  (cioè dopo i primi  $n$  turni di gioco) ogni strategia è vincente per I; e quindi II non poteva avere seguito la strategia  $\tau$ .

Segue ora il risultato per i chiusi. Se  $B \subseteq {}^\omega \omega$  è chiuso, il complementare  $\neg B$  è aperto; e quindi anche l'insieme  $C := \{\langle 0 \rangle \frown x \mid x \in \neg B\}$  è aperto. Come già dimostrato il gioco  $G_X(C)$  è determinato; il giocatore I deve giocare necessariamente 0 per vincere, poi il gioco si riduce a  $G_X(\neg C / \langle 0 \rangle) = G_X(B)$  in cui si sono scambiati i ruoli di I e II. Quindi anche  $B$  è determinato.  $\square$

**Proposizione 5.9** (Gale-Stewart, 1953). (AC) *Esiste un insieme di reali non determinato.*

*Dimostrazione.* Le possibili strategie per I sono  $2^{\aleph_0}$ : sono tutte le funzioni  $\bigcup_{n \in \omega} 2^n \omega \rightarrow \omega$ . Analogamente per II. Indichiamo quindi  $\{\sigma_\gamma \mid \gamma < 2^{\aleph_0}\}$  un'enumerazione delle strategie di I,  $\{\tau_\gamma \mid \gamma < 2^{\aleph_0}\}$  un'enumerazione delle strategie di II.

Usiamo ora un procedimento per diagonalizzazione. Costruiamo ricorsivamente  $A = \{a_\alpha \mid \alpha \in 2^{\aleph_0}\}, B = \{b_\alpha \mid \alpha \in 2^{\aleph_0}\} \subseteq {}^\omega \omega$ :

$$\begin{aligned} a_\alpha \in {}^\omega \omega \text{ tale che } \exists z \in {}^\omega \omega (a_\alpha = z * \tau_\alpha) \wedge a_\alpha \notin \{b_\gamma \mid \gamma < \alpha\} \\ b_\alpha \in {}^\omega \omega \text{ tale che } \exists y \in {}^\omega \omega (b_\alpha = \sigma_\alpha * y) \wedge b_\alpha \notin \{a_\gamma \mid \gamma < \alpha\} \end{aligned}$$

La costruzione è possibile perchè al passo  $\alpha$ -esimo ci  $2^{\aleph_0}$  possibilità per  $a_\alpha$  ma meno di  $2^{\aleph_0}$  elementi  $\{b_\gamma \mid \gamma < \alpha\}$  da escludere, quindi è possibile trovare un  $a_\alpha$ ; e un discorso analogo vale per  $b_\alpha$ .

Chiaramente  $A \cap B = \emptyset$  e  $|A| = |B| = 2^{\aleph_0}$  (questo ci garantisce che non possiamo usare il lemma 5.3 per trovare una strategia vincente). Dimostriamo che l'insieme  $A$  non è determinato; in effetti neanche  $B$  lo è.

- Se  $\sigma_\alpha$  fosse strategia vincente per I,  $\forall y \in {}^\omega \omega (\sigma_\alpha * y \in A)$ . Ma per costruzione di  $B$ ,  $b_\alpha = \sigma_\alpha * \bar{y} \in B$ , e  $B \cap A = \emptyset$ ,  $\perp$ .
- Se  $\tau_\alpha$  fosse strategia vincente per I,  $\forall z \in {}^\omega \omega (z * \tau_\alpha \notin A)$ . Ma per costruzione di  $A$ ,  $a_\alpha = \bar{z} * \tau_\alpha \in A$ ,  $\perp$ .

$\square$

**Corollario 5.10.**  $AC \Rightarrow \neg AD$ .

**Proposizione 5.11** (Mycielski, 1964). (ZF) *Esiste un gioco  $G_{\aleph_1}(A)$  non determinato.*

Martin riporta le dimostrazioni di determinatezza di numerose famiglie di insiemi. L'ambiente in cui lavora è ZFC privato dell'assioma potenza e con l'assioma del Rimpiazzamento limitato alle  $\Sigma_1$ -formule; possiamo indicare temporaneamente ZS tale teoria.

**Proposizione 5.12** (Philip Wolfe, 1955). (ZS) *Ogni gioco  $\Sigma_2^0$  è determinato. In particolare,  $\text{Det}(\Sigma_2^0)$ .*

**Proposizione 5.13** (Morton Davis, 1964). (ZS) *Ogni gioco  $\Sigma_3^0$  è determinato. In particolare,  $\text{Det}(\Sigma_3^0)$ .*

**Proposizione 5.14** (Martin, 1974). (ZS) *Ogni gioco  $\Sigma_3^0$  è determinato. In particolare,  $\text{Det}(\Delta_4^0)$ .*

Questo è il risultato più complesso che possa essere dimostrato con tecniche classiche in  $\mathcal{A}^2$ ; il seguente richiede invece un lavoro dimostrativo molto più impegnativo. Ricordiamo che i Boreliani sono un sottoinsieme dei  $\Delta_1^1$ , e le due classi coincidono nel caso  $T = {}^{<\omega}X$ :

**Proposizione 5.15** (Martin, 1975). (AC) *Ogni Boreliano è determinato.*

**Proposizione 5.16** (Martin, 1990). (AC) *Ogni  $\Delta_1^1$  è determinato.*

Su questa strada è però impossibile proseguire: come già preannunciato la determinatezza degli insiemi  $\Pi_1^1$  è enunciato indipendente da ZFC, equivalente ad  $\exists 0^\#$ .

I seguenti risultati riguardano invece le varianti proposte al gioco  $G$ :

**Proposizione 5.17** (Mazur, Banach - Maudlin 1981; Oxtoby 1957). *Sia  $A \subseteq {}^\omega\omega$ . Allora:*

(a) *II ha una strategia vincente in  $G_\omega^{**}(A)$  sse  $A$  è magro.*

(b) *I ha una strategia vincente in  $G_\omega^{**}(A)$  sse  $N_s$   
 $A$  è magro per un qualche  $s \in {}^{<\omega}\omega$ .*

**Proposizione 5.18** (Davis 1964). *Sia  $A \subseteq {}^\omega 2$ . Allora:*

(a) *II ha una strategia vincente in  $G_2^*(A)$  sse  $A$  è numerabile.*

(b) *I ha una strategia vincente in  $G_2^*(A)$  sse  $A$  ha un sottoinsieme perfetto.*

Se ne può trovare la dimostrazione in Kanamori, cap. 27.

Il seguente corollario applica la proposizione 5.18 nel consueto spazio  ${}^\omega\omega$ ; per farlo ci è necessaria la mappa:

$$\psi : {}^\omega\omega \rightarrow {}^\omega 2$$

$$\psi(x) = \langle 1, 1, \dots, 1, 0 \rangle - \langle 0, 0, \dots, 0, 1 \rangle - \langle 1, 1, \dots, 1, 0 \rangle - \langle 0, 0, \dots, 0, 1 \rangle - \dots$$

in cui la  $k$ -esima sequenza è composta di  $x(k)$  cifre uguali e una diversa, in modo che la successione risultante non sia definitivamente costante.

Si dimostra facilmente che  $\psi$  è omeomorfismo sull'immagine, e che tale immagine è composta da tutte e sole le successioni non definitivamente costanti.

**Corollario 5.19.** *Sia  $A \subseteq {}^\omega\omega$ . Allora:  $G_2^*(\psi[A])$  è determinato sse  $A$  gode della p.s.p..*

## 5.4 Det( $\Pi_1^1$ )

**Proposizione 5.20** (Martin).  $\exists 0^\# \Rightarrow \text{Det}(\Pi_1^1)$ .

*Dimostrazione.* Fissiamo  $A \subseteq {}^k(\omega^\omega)$ ,  $A \in \Pi_1^1$ ; vogliamo dimostrare che  $G_\omega(A)$  è determinato.

Grazie alla proposizione 4.30 ed al suo corollario esiste un albero  $T$  su  $\omega \times \omega$  tale che per ogni  $x \in {}^\omega\omega$

$$A(x) \Leftrightarrow T_x \text{ è ben fondato} \Leftrightarrow <_{\text{KB}} \text{ ben ordina } T_x.$$

Inoltre, guardando la definizione di  $T$ , possiamo dedurre che  $T \in L$ .  
Fissato  $x \in {}^\omega\omega$  definiamo un nuovo ordinamento su  $\omega$ :

$$i <_x j \Leftrightarrow (s_i, s_j \notin T_x \wedge i < j) \vee (s_i \notin T_x \wedge s_j \in T_x) \vee (s_i, s_j \in T_x \wedge s_i <_{\text{KB}} s_j),$$

ossia l'ordinamento è quello KB per gli indici degli  $s_i \in T_x$  mentre è quello naturale per tutti gli altri. Ne segue che

$$A(x) \Leftrightarrow <_x \text{ è buon ordine.}$$

Definiamo poi per ogni  $s \in {}^{<\omega}\omega$  gli alberi

$$T_{\langle s \rangle} := \{w \mid \exists m < |s| (\langle s \upharpoonright m, w \rangle \in T)\}$$

e gli ordini lineari su  $\omega$

$$i <_s j \Leftrightarrow (s_i, s_j \notin T_{\langle s \rangle} \wedge i < j) \vee (s_i \notin T_{\langle s \rangle} \wedge s_j \in T_{\langle s \rangle}) \vee (s_i, s_j \in T_{\langle s \rangle} \wedge s_i <_{\text{KB}} s_j).$$

Chiaramente  $<_x = \bigcup_{m \in \omega} <_{x \upharpoonright m}$ .

Possiamo infine definire un nuovo albero su  $\omega \times \omega$ :

$$T^* := \{\langle s, u \rangle \mid \forall i, j < |s| (u(i) < u(j) \Leftrightarrow i <_s j)\}$$

che contiene le coppie  $\langle s, u \rangle$  in cui  $u : \langle |s|, <_s \rangle < \langle \omega_1, < \rangle$ .

L'unione di un singolo ramo è ciò che ci serve:

$$\begin{aligned} A(x) &\Leftrightarrow \exists g : \langle \omega, <_x \rangle < \langle \omega_1, < \rangle \\ &\Leftrightarrow \exists g \in {}^\omega\omega_1 (\langle x, g \rangle \in [T^*]). \end{aligned}$$

Consideriamo ora un gioco ausiliario  $G^* \in L$ :

$$\begin{array}{ccccccc} I & \langle x(0), g(0) \rangle & & \langle x(2), g(1) \rangle & & \langle x(4), g(2) \rangle & \\ II & & x(1) & & x(3) & & \dots \end{array}$$

dove I oltre a giocare  $x(2i) \in \omega$  gioca anche  $g(i) \in \omega_1$  tentando di preservare l'ordinamento da  $\langle x, <_x \rangle$  in  $\omega_1$ : I vince sse  $x \in A$  e  $g : \langle x, <_x \rangle < \langle \omega_1, < \rangle$  cioè sse  $\langle x, g \rangle \in [T^*]$ .

$G^*$  è determinato (in  $L$ ), perchè se I perde perde ad uno stato finito, oltre il quale  $g$  non può più preservare l'ordinamento. Quindi, se I non ha una strategia vincente, a II basta utilizzare la sua strategia *minimale*: giunti ad un certo stadio finito, I perderà definitivamente.

Dimostriamo allora che anche  $G_\omega(A)$  è determinato.

Supponiamo dapprima che nel gioco  $G^*$  sia I il giocatore con una strategia vincente (in  $L$ ), e sia questa  $\sigma(i) = \langle x(2i), g(i) \rangle$ ; tale strategia è vincente anche in  $V$ , perchè se I perdesse in  $V$  perderebbe ad uno stadio finito e quindi anche in  $L$ ; allora I ha una strategia vincente anche in  $G_\omega(A)$ : è semplicemente  $\sigma'(i) = x(2i)$  (per semplicità notazionale sto indicando  $\sigma, x, g, \sigma'$  come se non dipendessero da altro che da  $i$ ).

Viceversa se la strategia vincente in  $G^*$  in  $L$  è  $\tau$  di II, consideriamo l'insieme

$$P_\tau = \{\text{inizi di partite di } G^* \text{ che non sono sicure per II}\} \subseteq {}^{<\omega}\omega$$

cioè quei segmenti iniziali di partita in cui potrebbe ancora vincere I. Osserviamo che in  $L$  la relazione  $\langle P_\tau, \supset \rangle$  è ben fondata: non possono esserci rami infiniti perchè — come già detto — se I perde deve perdere necessariamente ad uno stadio finito. La ben fondatezza di  $\supset$  in  $P_\tau$  vale anche in  $V$  perchè tale relazione è assoluta. Quindi  $\tau$  deve essere strategia vincente per II al gioco  $G^*$  anche in  $V$ .

Resta da trovare la strategia vincente  $\tau'$  per II al gioco  $G_\omega(A)$ . Deve essere:

$$\begin{aligned} \tau &: \bigcup_{n < \omega} ({}^{2n+1}\omega \cup {}^{n+1}\omega_1) \rightarrow \omega \\ \tau' &: \bigcup_{n < \omega} {}^{2n+1}\omega \rightarrow \omega \end{aligned}$$

Grazie ad  $\exists 0^\#$  trovo un insieme di indiscernibili  $I$  con i quali si può descrivere tutto  $L$ ; in particolare si può descrivere  $\tau$ . Diciamo che

$$\tau = h_\varphi(i_{\xi_1}, \dots, i_{\xi_m})$$

e  $i_{\xi_1} < \dots < i_{\xi_m} < \gamma < \omega_1$ ; definamo  $C := I_a \cap (\omega_1 \setminus \gamma)$ . La strategia cercata è:

$$\tau'(t) = k \Leftrightarrow \exists u \in {}^{n+1}C (\langle t \upharpoonright n+1, u \rangle \in T^* \wedge \tau(t, u) = k).$$

in cui cioè  $u : \langle n+1, <_{t \upharpoonright n+1} \rangle < \langle C, < \rangle$ . La strategia è ben definita per indiscernibilità di  $C$ ; dimostriamo ora che è vincente. Per assurdo esista una partita  $x$  in accordo con  $\tau'$  e ciononostante  $x \in A$ .  $C$  è non numerabile:

$$\exists g : \langle \omega, <_x \rangle < \langle C, < \rangle \leftrightarrow \langle \omega_1, < \rangle.$$

Quindi  $\langle x, g \rangle \in [T^*]$ , cioè la coppia corrisponde ad una partita in cui vince I, in contraddizione col fatto che in tale partita II ha seguito la strategia vincente  $\tau$ .  $\square$

## Capitolo 6

# Sviluppi e generalizzazioni

Il teorema 2.29 è un ottimo punto di partenza, ma molte altre cose si possono dire a riguardo di  $0^\#$ . Si possono trovare conseguenze dell'assioma  $\exists 0^\#$  in svariati campi, anche molto distanti fra loro, della teoria degli insiemi. A titolo di esempio, nell'ipotesi  $\exists 0^\#$  si può dimostrare che:

**Proposizione 6.1.**  $(\exists 0^\#)$  Ogni insieme  $\Sigma_2^1$  è Lebesgue-misurabile.

**Proposizione 6.2.**  $(\exists 0^\#)$  Esistono dei generici di Cohen su  $L$ .

Volendo generalizzare la costruzione, si può pensare di definire un insieme  $A^\#$  per ogni insieme  $A \subseteq \text{On}$ . L'ambiente non sarà più  $L$  bensì  $L[A]$ , classe che in generale estende propriamente  $L$ , per la cui definizione rimandiamo a Kunen o Devlin; tutti i risultati dimostrati per  $0^\#$  a riguardo di  $L$  valgono per  $A^\#$  a riguardo di  $L[A]$ .

Ad esempio si dimostra che:

**Proposizione 6.3** (Martin).  $\forall a \in {}^\omega\omega (\exists a^\# \Rightarrow \text{Det}(\Pi_1^1(a)))$

**Corollario 6.4.**  $(\forall a \in {}^\omega\omega \exists a^\#) \Rightarrow \text{Det}(\Pi_1^1)$ .

la cui dimostrazione è pressochè identica a quella della proposizione 5.20.

L'esistenza di un cardinale misurabile implica che  $\forall a \in {}^\omega\omega \exists a^\#$ , da cui ovviamente segue  $\exists 0^\#$ .



# Appendice A

## Tabella dei simboli

A scanso di equivoci riportiamo il significato dei simboli utilizzati.

### Simboli logici

$\wedge$	AND logico
$\vee$	OR logico
$\neg$	NOT logico
$\Rightarrow$	implicazione logica
$ZF \vdash \sigma$	l'enunciato $\sigma$ è dimostrabile nel sistema di assiomi ZF

### Simboli insiemistici

$\rightarrow$	funzione
$\mapsto$	iniezione
$\twoheadrightarrow$	suriezione
$\xrightarrow{\sim}$	biiezione, ma anche: vedi sotto
$\hookrightarrow$	inclusione
$\setminus$	differenza tra insiemi
$\text{im } f$	immagine della funzione $f$
$f''A$	immagine dell'insieme $A$ mediante la funzione $f$
$ A $	cardinalità di $A$
$\text{ot}(R)$	tipo d'ordine del buon ordine $R$
$[A]^\alpha$	sottoinsiemi di $A$ di tipo d'ordine $\alpha$
$\mathcal{P}_\lambda(A)$	sottoinsiemi di $A$ di cardinalità $\lambda$
On	classe degli ordinali
Card	classe dei cardinali
Form	insieme delle formule
Sent	insieme degli enunciati
Vbl	insieme delle variabili

**Simboli model-teoretici**

$<$	sottostruttura; morfismo. Ad esempio per le funzioni che preservano l'ordine.
$\prec$	sottostruttura elementare; immersione elementare
$\prec_n$	sottostruttura $\Sigma_n$ -elementare; immersione $\Sigma_n$ -elementare
$\xrightarrow{\cong}$	isomorfismo
$\equiv$	strutture elementarmente equivalenti
$\cong$	strutture isomorfe
$\mathcal{M} \models \phi[f]$	$\mathcal{M}$ soddisfa la formula ottenuta da $\phi$ sostituendo ad ogni variabile libera $v_i$ l'elemento $f(i)$

Ulteriori simboli sono presentati nel capitolo *Richiami*.

# Bibliografia

- [1] Kanamori A., *The higher infinite*, Spriger-Verlag, Berlin Heidelberg 1994
- [2] Devlin, *Constructibility*, Spriger-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo 1984
- [3] Kunen K., *Set Theory. An Introduction to independence proofs.*, Amsterdam, 1980
- [4] Cantor G., *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*, V. MA 21 , 1883
- [5] Levy, *Basic Set Theory, Perspectives in Mathematical Logic*, Spriger-Verlag, Berlin, 1979
- [6] Borel, *La théorie du jeu et les équations intégrales á noyau symétrique*, CRP 173, 1921
- [7] Suslin, *Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis.*, CRP 164, 1917
- [8] Mycielski e Steinhaus, *A mathematical axiom contradicting AC*, BAPS vol. 10, 1962
- [9] Silve J. H., *Some applications of model theory in set theory*, AML 3, 1977
- [10] Martin D., libro sulla determinatezza ancora non pubblicato